

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

**Bakalářská práce**

Petra Machýčková

**Pojmové mapování v matematice**

*Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Pojmové mapování v matematice“ vypracovala zcela samostatně na základě použité literatury a dalších zdrojů, které řádně cituji, a jsou uvedeny v seznamu použité literatury.*

V Olomouci .....

Petra Machýčková

.....

Podpis

Ráda bych poděkovala panu doc. PhDr. Bohumilu Novákovi, CSc. za vedení bakalářské práce, za cenné rady a připomínky v průběhu zpracování.

Také bych chtěla poděkovat své rodině za morální podporu a pomoc při zpracování mé bakalářské práce, a které si nesmírně vážím.

# Obsah

Úvod.....	1
<b>1 Výukové metody .....</b>	<b>2</b>
<b>2 Pojmové mapování .....</b>	<b>3</b>
2.2 Rozdíl mezi pojmovou mapou a pojmovým mapováním .....	5
2.1 Pojem .....	6
2.2 Vlastnosti pojmových map.....	8
2.3 Psychologické základy pojmových map .....	10
2.4 Funkce, klady a zápory pojmového mapování.....	12
2.5 Typy pojmových map .....	14
2.6 Konstrukce pojmových map .....	15
2.6.1 Počítačový program CmapTool .....	17
2.6.2 Chyby při konstrukci .....	18
2.7 Hodnocení pojmových map .....	19
<b>3 Využití pojmových map v matematice .....</b>	<b>20</b>
3.1 Pojmové mapy a plánování kurikula.....	21
<b>4 Vlastní tvorba pojmových map .....</b>	<b>22</b>
4.1 Geometrie v rovině a v prostoru v RVP.....	23
4.2 Pojmová mapa - tělesa .....	24
4.3 Pojmová mapa – krychle.....	29
4.4 Pojmová mapa – Archimédovská tělesa .....	33
<b>Závěr.....</b>	<b>36</b>
<b>Seznam obrázků .....</b>	<b>37</b>
<b>Seznam tabulek.....</b>	<b>38</b>
<b>Seznam použitých zdrojů.....</b>	<b>39</b>
<b>Seznam příloh .....</b>	<b>43</b>
<b>ANOTACE</b>	

## Úvod

V současné době se ve výuce klade velký důraz na používání různých aktivizačních výukových metod. Jednou z těchto metod je pojmové mapování, které u žáků rozvíjí kognitivní myšlení, tedy myšlení s porozuměním. Pojmové mapy je možné použít ve výuce každého předmětu, nicméně nejvíce jsou využívány v přírodních vědách (např. v matematice či fyzice), kde je nutné vysvětlení abstraktních pojmů, které jsou pro uvedené vědy charakteristické. Pojmové mapování je založeno na systematickém propojování pojmů a nalezení jejich vzájemných vztahů.

Zatímco v zahraničí je téma pojmových map velice dobře zpracované a stalo objektem několika autorů, publikace v českém jazyce nejsou příliš četné. Většina českých autorů věnuje pojmovým mapám jen jednu či dvě kapitoly svých knih. Nejaktuálnější zdrojem informací k tématu „pojmové mapy“ se u nás staly články publikované v odborných časopisech, jako je například Pedagogická orientace nebo Pedagogika.

Cílem bakalářské práce je po prostudování dostupné literatury uvést základní charakteristiky pojmových map a jejich konstrukce. Naznačit možné využití pojmových map ve výuce matematiky. A v neposlední řadě vytvořit ukázky tvorby pojmových map na třech příkladech geometrického učiva, které mohou být využity jako metodický návod pro učitele matematiky základních a středních škol. Výběr ústředních pojmů je proveden na základě Rámcově vzdělávacího programu pro základní vzdělávání. Ke konstrukci map bylo použito počítačového softwaru CmapTool, který je produktem společnosti IHMC (Institute for Human and Machine Cognition).

Práce je rozdělena na dvě části. První část se zaměřuje na vlastnosti, funkce, typy a psychologické základy pojmových map. Zde je také připojena kapitola o počítačovém softwaru CmapTool, který umožňuje tvorbu pojmových map. Všechny uvedené informace jsou obsaženy v první a druhé kapitole. Část druhá zužuje využití pojmových map na předmět matematika a řadíme do ní třetí a čtvrtou kapitolu. Ve čtvrté kapitole jsou ukázky vytvořených pojmových map, ke kterým se v této kapitole nachází komentář pro lepší orientaci a pochopení map.

# 1 Výukové metody

Výukové metody jsou začleněny do edukačního systému jako důležité prvky, jejichž prostřednictvím výchova postupuje žádoucím směrem (Maňák, Švec, 2003, s. 7).

V dnešní době je možné ve vyučování použít velké množství těchto metod. Maňák a Švec (2003) je rozdělují do tří skupin - klasické, aktivizující a komplexní. Obecně všechny přispívají k úspěšnějšímu učení a kvalitnějšímu vzdělávacímu procesu (Fisher, 2007). Pojmové mapy podle Maňáka a Švece (2003) řadíme do skupiny klasických výukových metod, které jsou názorně demonstrační. Uvedené výukové metody pracují s obrazem.

Obraz je znám jako nejstarší, nejběžnější a nejužívanější didaktický prostředek, považující se za učební pomůcku, která má charakter zobrazení předmětů a skutečností (Novák, 2005, s. 33). Ve svém článku Michal Novák (2005, s. 33) odkazuje na Z. Macka, který vymezuje didaktické obrazy jako „vizuální dvourozměrná a audiovizuální média vytvořená nebo upravená podle didaktických a estetických kritérií pro výchovně vzdělávací proces jako prostředky názoru.“ Míra sémantizace (do jaké míry didaktický obraz aktivizuje myšlenkovou činnost příjemce) a míra vizualizace (do jaké míry je didaktický obraz schopen ilustrovat abstraktní pojmy, zprostředkované abstraktním poznáním) jsou dva základní psychologické parametry, které mají pro didaktický obraz význam.

Práce s obrazem tedy ve výuce představuje starý a osvědčený postup (Mareš, 2011). Už v 15. století bylo využíváno tzv. „azulejos didácticos“ – destiček či kachlíček s didaktickými záměry. V současné době je nalezeno několik didaktických azelujos, která jsou součástí portugalských muzeí. Azelujos se zabývají především tematikou přírodovědných oborů – astronomie, fyziky, geografie a také geometrie. Některé sloužily jako dekorace, ale o geometrických tabulkách se hovoří převážně jako o učebních pomůckách (specifická podoba didaktického obrazu). Předpokládá se, že zobrazují jednotlivé obrázky z knihy *Elementa Geometriae* jezuitského kněze André Tacqueta z roku 1654 (Novák, 2005).

Základ novověké práce s obrazem najdeme v Komenského knize *Svět v obrazech* a později u jeho následovníků. Maňák a Švec (2003, s. 82) uvádějí: „Dnešní inflace obrazových informací vytváří novou situaci i ve výuce, na kterou škola musí žáky připravit. Především by je měla vybavit nezbytnými předpoklady k tomu, aby v moderním světě vizuálních symbolů, znaků, signálů, a rozmanitých informací nezůstali zajeť v prvosignální skutečnosti.“

## 2 Pojmové mapování

Pojmové mapování (angl. concept mapping) je jednou z vyučujících strategií, která nejlépe žáky dovede k samostatnému a účinnému učení. Pojmové mapy bývají různě nazývány jak v českém, tak v anglickém jazyce. Můžeme se setkat s názvy jako: mapování mysli (mind - mapping), sémantické mapování (semantic mapping), konceptuální mapování (concept mapping), slovní mapy (word - maps), mapy myšlení, pavučina, síťové znázornění, myšlenkové spojnice apod. V mnoha knihách bývá tato vyučující strategie často souhrnně označována jako mentální mapování. Například Fisher (1997, s. 71) ve své knize uvádí: „Všechny postupy, které znázorňují myšlení nějakým zobrazením, můžeme nazvat mentálními mapami“. Pojmové a mentální mapování zní sice podobně, ale jedná se o dvě různé metody. Mentální mapování se pojí se jménem Tonyho Buzana, který se celosvětově zabývá výzkumem mozku a učním. Myšlenkovou mapu si můžeme představit takto: hlavní pojem se nachází uprostřed a z něj vyrůstají „větvě“ do stran. „Větvě“ jsou zde myšleny ve smyslu spojníc mezi jednotlivými pojmy. Na konci „větví“ jsou další, konkrétnější pojmy, a z těch potom zase vyrůstají menší „větvě“ atd. (Bendl, Voňková, 2010, s. 20). Myšlenkové mapy se však od pojmových map liší. Nejsou v nich popsány vztahy mezi pojmy a jednotlivé větve se nepojují pomocí tzv. křížových spojení, které charakterizují mapování pojmové (Bendl, Voňková, 2010).

Mapy pojmů se poprvé objevily už v roce 1972. Za jejich zakladatele se považuje Američan českého původu Joseph Donald Novak, který pojmové mapy využíval v rámci výzkumného programu na Cornellově univerzitě. Snahy o vytvoření pojmových map se v Evropě ale objevily už dříve. Potíž byla v tehdejších politických systémech, které zabránily rozšíření a docenění prioritních prací a omezovaly tak kontakty mezi vědci z východu a západu (Mareš, 2011). Zde je na místě uvést jména dvou autorů: německého pedagoga O. Richtera a českého psychologa V. Kuliče, kteří vytvářeli mapy pojmů v rámci teorie programovaného učení již dříve (Tollingerová, Kněžů, Kulič, 1966).

Cílem Novakova programu bylo sledování a pochopení změn v dětském chápání vědeckých, respektive základních přírodovědeckých pojmů (Novak, Cañas, 2008). Nejdříve se snažil změny zjišťovat na základě vyhodnocování záznamů z rozhovorů s dětmi. Později si uvědomil, že je lepší prezentovat znalost dětí ve formě pojmových map (Bendl, Voňková, 2010). A tak se zrodil nový nástroj nejen pro použití ve výzkumu, ale také pro mnoho jiných použití (Novak, Cañas, 2008). Po formální stránce šlo zpočátku o grafické znázornění pojmů a vztahů mezi pojmy bez slovního označení spojníc, tj. hran grafu; to zavedl Novak až v práci

z roku 1981 (Mareš, 2011, s 218). Celý výzkumný projekt byl položen na základech Ausbelové teorii smysluplného učení (Bendl, Voňková, 2010, s. 20). Tato teorie učení zdůrazňuje vliv žákových dřívějších znalostí na následné učení (Prokša, 2008). Žák během poznávání začleňuje nové informace či poznatky do již existujících poznávacích schémat. Tímto přeprocovává dosavadní schéma, zasazuje nové informace, vytváří vzájemné vztahy mezi poznatky a vytváří tím i nové celky. Proto je smysluplné učení trvalé a účinné, zatímco mechanicky naučené vědomosti se lehce zapomínají a nedají se aplikovat v nových situacích nebo při řešení nových problémů (Prokša, 2008).

V roce 1986/87 se Novak seznámil na Floridě s A. Cañasem a jeho týmem. Ti v té době zakládali výzkumné pracoviště IHMC (Institute for Human and Machine Cognition)<sup>1</sup>. Jejich spolupráce vyústila v tvorbu softwaru, který se snažil identifikovat a poté zobrazit strukturu znalostí expertů z různých oborů. A tak společným úsilím a sdružením financí vznikl software nazvaný CmapTool, který má univerzální použití a ve zlepšených verzích se využívá při konstruování pojmových map dodnes (Mareš, 2011, s. 219).

Joseph D. Novak je v současné době profesorem na vysoké škole v Emeritu, na Cornellově univerzitě a vedoucím vědeckým pracovníkem IHMC. Je autorem nebo spoluautorem 29 knih a více než 140 knižních kapitol a článků v odborných knihách a časopisech. Jeho nejznámější kniha *Learning how to learn* byla vydána v roce 1984, v současné době je přeložena do osmi cizích jazyků a je čtena širokou veřejností. J. D. Novak mimo jiné spolupracuje s mnoha univerzitami, podniky, NASA, katedrou námořnictva atd. Během svého života získal řadu ocenění a poct, včetně doktorátů z mnoha zemí (IHMC, Joseph D. Novak).

---

<sup>1</sup> IHMC je neziskový výzkumný ústav zapojený do systému Floridských univerzit. Výzkumníci IHMC se zaměřují na využití a rozšíření lidských schopností. V současné době se výzkum zabývá především umělou inteligencí, kognitivní vědou, robotikou, komunikací a spoluprací s dalšími souvisejícími oblastmi. IHMC intenzivně spolupracuje s průmyslem a vládou za cílem rozvoje vědy a techniky (IHMC, IHMC Story).

## 2.2 Rozdíl mezi pojmovou mapou a pojmovým mapováním

Pojmové mapování je založeno na myšlence, že pojmy a vztahy mezi pojmy jsou sestavené do bloku vědomostí. Hierarchická struktura pojmů a definic je vhodnou a jednoduchou reprezentací vědomostí (Prokša, 2008). Pojmové mapování je tedy proces tvoření pojmové mapy (Bendl, Voňková, 2010, str. 20). Ta vzniká jako vizualizace pojmů, myšlenek, idejí a znalostí. Janík (2005, s. 57 až 58) s odkazem na J. Novaka uvádí, že pojmové mapování je výzkumná technika sloužící k zachycování významu specifických konceptů prostřednictvím grafické reprezentace souvisejících pojmů a jejich vzájemného vztahu. Zde byl použit výraz „grafická reprezentace“. Jedná se o technické znázornění, o znázornění geometrických útvarů (obdélníků, elips, úseček, ...). Mapování pojmů tedy vyžaduje od žáka určitou rovinou i prostorovou představivost. Můžeme hovořit přímo o prostorové inteligenci (Mareš, 2011, s. 224).

Janík (2005, s. 58) rozlišuje dva druhy pojmového mapování:

- **Strukturované**
  - Vytvořené mapy jsou obsahově shodné, protože jsou vytvářeny z předem pevně daného seznamu pojmů a naším úkolem je tyto pojmy uspořádat do schematické struktury. Výsledné mapy se liší pouze vzhledovou stránkou.
- **Nestrukturované**
  - Vytvořené mapy jsou odlišné, jak po vzhledové, tak po obsahové stránce, protože k vytváření máme k dispozici pouze klíčový pojem a naším úkolem je vytvořit strukturu pojmů, která na klíčový pojem navazuje.

Mapování pojmů je strategie, pomocí níž se žák učí, jak se dobře učit a jak porozumět struktuře tématu, jemuž se učí. Jedná se o strategii vyššího řádu, tj. meta-strategii učení (Mareš, 2011, s. 224).

Pojmové mapy jsou grafické nástroje sloužící pro organizaci a reprezentování znalostí. (Novak, Cañas, 2008). Jsou to diagramy, ve kterých jsou pojmy uspořádány podle vzájemných vztahů (Cibáková, 2012, s. 22). Pojmy vytvářejí okrouhlé útvary (kružnice, elipsy) a jsou vzájemně spojeny čarami, které mezi nimi vytvářejí vazby (Novak, Cañas, 2008). Nejčastější jsou pojmy uspořádány do hierarchické struktury – v horní části mapy se nacházejí abstraktnější pojmy a níže pojmy konkrétnější. Pojmovou mapu můžeme graficky přirovnat k převrácenému stromu. Z centrálního pojmu (kořene) vyrůstají „větve“ do pojmů ve spodnějších částech mapy, z těch opět vyrůstají „větve“ do pojmů v nižších

úrovních mapy atd. U pojmových map je charakteristické popsání vzájemných vztahů mezi pojmy (většinou se jedná o jedno až tři slova) a tzv. křížové spojení (Bendl, Voňková, 2010, s. 20). Křížové spojení vytváří vztahy a vazby mezi pojmy v různých částech mapy. Díky tomuto spojení můžeme vidět, jak je pojem z jedné části mapy zastoupený i v jiné části. Při vytváření nových znalostí hrají křížová spojení velkou roli a přidávají na kvalitě pojmových map (Novak, Cañas, 2008).

Pojmové mapy mohou sloužit k různým účelům. Fisher (2005, s. 79) vytyčil tři jejich hlavní cíle:

- 1) Zjištění, co víme: rozpoznání klíčových pojmů, vyznačení souvislostí mezi myšlenkami a vytvoření smysluplné struktury z toho, co víme a čemu rozumíme;
- 2) Pomoc při plánování: pomáhá při plánování činnosti či projektu tak, že usnadní uspořádání a seskupení myšlenek a vyjeví souvislost mezi nimi;
- 3) Pomoc při hodnocení: napomáhá hodnocení zkušeností či znalostí uvažováním o klíčových prvcích toho, co víme nebo co jsme učinili.

## 2.1 Pojem

Pojem je základní stavební jednotka pojmových map. Můžeme na něj nahlížet několika různými způsoby:

- V pedagogickém slovníku je pojem vnímán jako „zobecněná představa o něčem, vyjádřená jedním či více výrazy přirozeného nebo formálního jazyka“ (Průcha, Walterová, Mareš, 2003, s. 168).
- „Pojmy jsou kategorie nebo třídy věcí či myšlenek, které mají společné nejdůležitější (podstatné) vlastnosti,“ uvádí Pasch (1998, s. 56).
- Fisher (2005, s. 73) chápe pojem jako „myšlenku, která vnáší řád; je to abstrakce, která spojuje řadu faktů a pokouší se vysvětlit je tím, že je pořádá do kategorií nebo tříd“.
- „Pojmy jsou základními stavebními kameny kvalitního kurikula,“ uvádí Pasch (1998, s. 57).
- „Dětem bychom měli pojem vysvětlit jako slovo, které si můžeme v duchu nějak zobrazit“ (Fisher, 2005).

Ať už se na pojmy díváme jakkoliv, pomáhají nám třídit a uspořádat myšlenky a prožitky. Pojmy dávají určité skutečnosti dohromady tak, abychom mohli rozpoznat odlišnosti a vztahy mezi jevy. Vyjadřují tedy vzorce podobností a odlišností, které nám

pomáhají s uspořádáním nových zkušeností. Jsou to výtvoři lidské mysli, které nám umožňují porozumět zkušenosti a učit se z ní. Pojmy jsou označení, které dáváme myšlenkám. Mohou být jednoduché nebo mohou mít složitější význam. K porozumění pojmu nestačí pouze řada definic, je nutné k nim poskytnout vysvětlení a příklady tak, aby děti uměly na dané téma vést rozhovor a vysvětlit podstatu naučené látky (viz obrázek 1) (Fisher, 2005, s. 73.).



Obrázek 1: Pojmové chápání podle G. Edelmana  
(Fisher, 2005, s. 73)

Pojmy můžeme různě třídit. Pasch (1998, s. 58) je rozděluje na konkrétní a abstraktní.

- **Konkrétní pojem** je takový, který můžeme popsat na základě pozorovatelných vlastností a jehož příklady existují ve hmotném světě.
  - Např. stůl, lampa, červená.
- **Abstraktní pojem** je nepozorovatelný, protože nemá hmotné rozměry nebo proto, že jeho hmotné parametry nejsou podstatné pro rozlišení toho, jestli se jedná nebo nejedná o exemplář daného pojmu.
  - Např. občan České republiky

Fisher (2005, s. 75) ve své knize odkazuje na Vygotského, který rozlišuje dvě úrovně utváření pojmů. V první úrovni se pojmy vytvářejí samovolně na základě prosté zkušenosti pomocí vnímání a praxí každodenního života. Tyto pojmy jsou nesoustavné a pojí se na konkrétní zkušenosti v životě člověka. Druhou úroveň tvoří pojmy „vědecké“, které jsou charakteristické svou teoretičností, uspořádaností a záviselostí na užívání řeči a na učení.

Rozlišujeme tedy:

- **Pojmy spontánní:** Jsou osvojené přímou smyslovou zkušeností.
- **Pojmy vědecké:** Jsou abstrahované ze zkušenosti a osvojené prostřednictvím řeči.

## 2.2 Vlastnosti pojmových map

V úvodu této kapitoly je uvedeno několik základních vlastností pojmových map, jako hierarchická struktura, propojenost pojmů, křížové spojení nebo pojmenování vzájemných vztahů. Všechny tyto vlastnosti vyplývají z Novakova pojetí pojmové mapy, které je v současné době pokládáno za standartní formát.

Jenomže od doby, kdy Novak se svými spolupracovníky publikoval své práce, se vývoj pojmových map nezastavil. Původní myšlenku se snažili rozvíjet a zdokonalovat další badatelé. Můžeme je nazvat tzv. druhou generací. Jedním z výrazných tvůrců druhé generace je finský autor M. Áhlberg (Mareš, 2011, s. 226). Mareš (2011, s. 226) předkládá tabulku (jejímž autorem je Áhlberg), která uvádí rozdíl mezi Novakovým pojetím pojmových map a pojetím pojmových map druhé generace.

Tabulka 1: Srovnání původního a novějšího pojetí pojmových map (Mareš, 2011, s. 226 - 227)

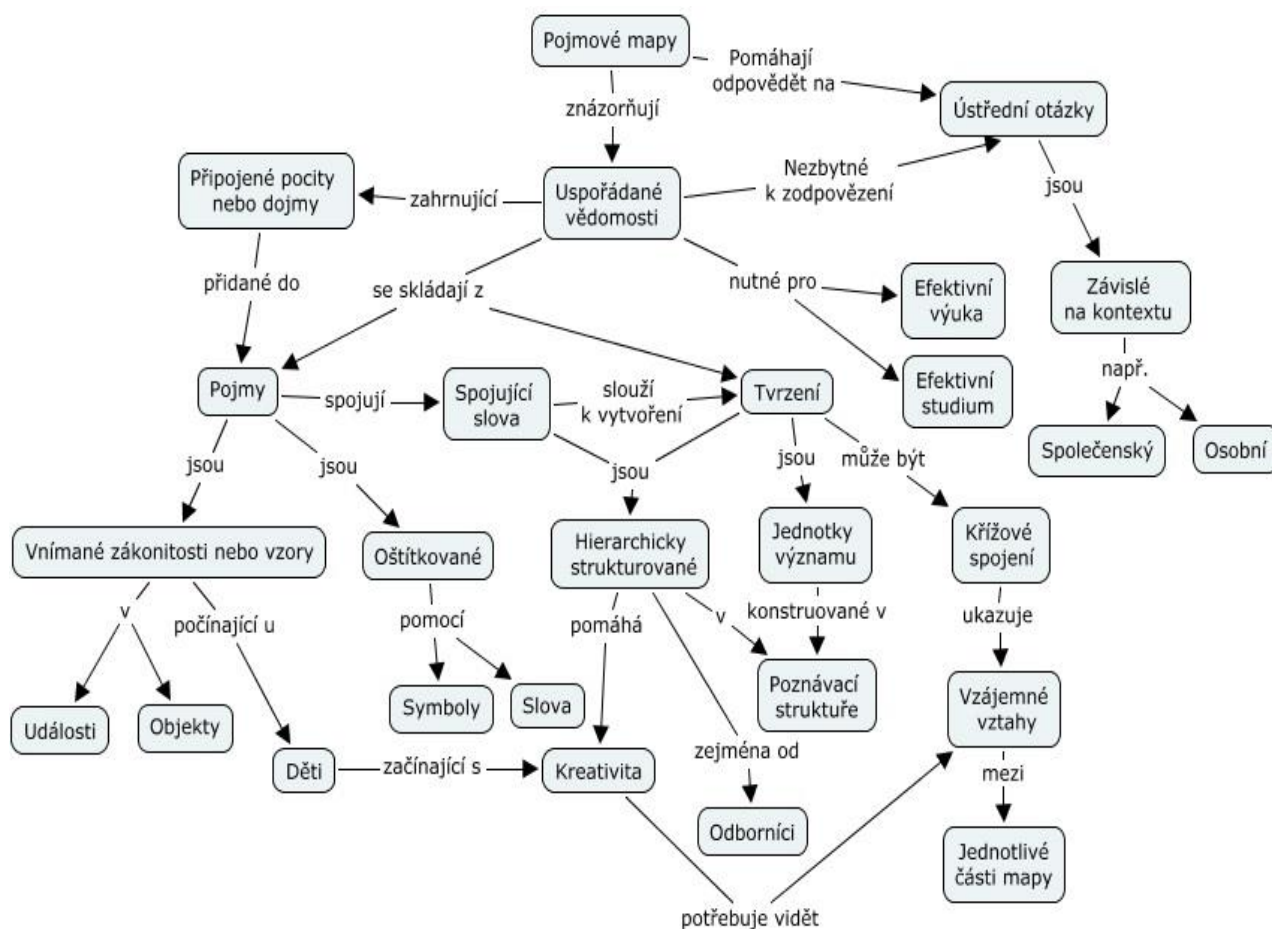
Srovnávaný aspekt	Pojetí Novaka	Nové pojetí
Východí teorie učení	Ausubelova teorie smysluplného učení.	Kterákoli teorie učení, neboť mapování pojmů je obecně použitelnou metodou, jako je např. mluvení nebo psaní.
Chápání pojmů	Všechny pojmy jsou chápány jako důležité prvky přemýšlení a učení.	Beze změny; všechny pojmy jsou chápány jako důležité prvky přemýšlení a učení.
Umístění pojmů	Někdy v rámečku, někdy mimo něj.	Vždy v rámečku.
Délka verbálního označení pojmů	Označení pojmu musí být krátké, stručné, často jednoslovné.	Délka označení pojmu není limitována; záleží na funkčnosti označení.
Označení směru vztahu mezi pojmy	Pravidlo říká, že hrana – spojnice má být opatřena šipkou, která ukazuje směr vztahu mezi pojmy; přitom jsou obvykle opatřeny šipkou hrany (spojnice), které jsou vodorovné nebo směřují dolů.	Všechny hrany (spojnice) mají být opatřeny šipkou, která ukazuje směr vztahu mezi pojmy.

<b>Délka verbálního popisu, hrany, spojnice mezi pojmy</b>	Slovní popis hrany (spojnice) musí být krátký, stručný.	Délka slovního označení hrany (spojnice) není limitována, ale musí přesně vystihovat způsob uvažování jedince, který pojmovou mapu tvoří, o vztahu mezi pojmy.
<b>Podoba pojmů, tj. uzlů grafu</b>	Jen slovní výrazy.	Kromě slovních výrazů také obrázky, videozáznamy, zvukové nahrávky.
<b>Podoba pojmové mapy</b>	Má znázorňovat hierarchickou strukturu.	Není třeba se omezovat jen na hierarchickou strukturu; už z ontologických a epistemologických důvodů nám jde o znázornění určitého systému vztahů; důležitá je tedy povaha znázorňovaného systému.
<b>Četnost výskytu každého pojmu</b>	Každý pojem se v pojmové mapě má vyskytovat pouze jednou.	Někdy je jeden pojem tak složitě propojen s ostatními, že se vyplatí (kvůli přehlednosti mapy), toto pravidlo porušit.
<b>Důležitost určitého pojmu</b>	V hierarchickém uspořádání pojmové mapy je důležitější pojem vždy výše a nejdůležitější pojem je nejvýše	Existují i jiná uspořádání pojmů, než hierarchické; v uspořádání, které není hierarchické, svědčí o důležitosti určitého pojmu počet hran (spojnic), které ho propojují s jinými pojmy; pojem, který je pro tvůrce pojmové mapy pojmem klíčovým, centrálním, má nejvíce hran (spojnic).
<b>Způsob čtení pojmové mapy</b>	V hierarchickém uspořádání pojmové struktury se pojmová mapa čte obvykle dolů	Existuje několik způsobů čtení pojmových map, např. ten, který zamýšlel autor mapy; nebo ten, který odpovídá pořadí pojmů v učebnici logika výkladu pojmů a logika výroků, tvrzení, která je zabudovaná ve studijních materiálech; Způsob čtení pojmové mapy lze také uživatelům usnadnit očíslováním hran (spojnic), tedy očíslováním pořadí příslušných výroků, tvrzení.

Z tabulky lze rozpoznat zřejmý posun od úzké vázanosti na jednu teorii učení k obecnému pojetí pojmové mapy jako nástroje učení, který je použitelný v různých teoriích učení. Nastává posun od ryze verbálního učení k audiovizuálnímu učení, jež využívá různé typy obrazových i zvukových materiálů, nejen slovní spojení (Mareš, 2011, s. 227).

Všechny vlastnosti pojmových map jsou shrnuty do následující pojmové mapy. Ta byla vytvořena v počítačovém programu CmapTool, stejně tak jako všechny pojmové

mapy uvedené v této práci. Mapa je přeložena z anglického originálu. Ve většině případů mapy čteme od shora dolů.



Obrázek 2: Pojmová mapa zobrazující klíčové prvky tvorby pojmových map  
(Novak, Cañas, 2008, s. 2)

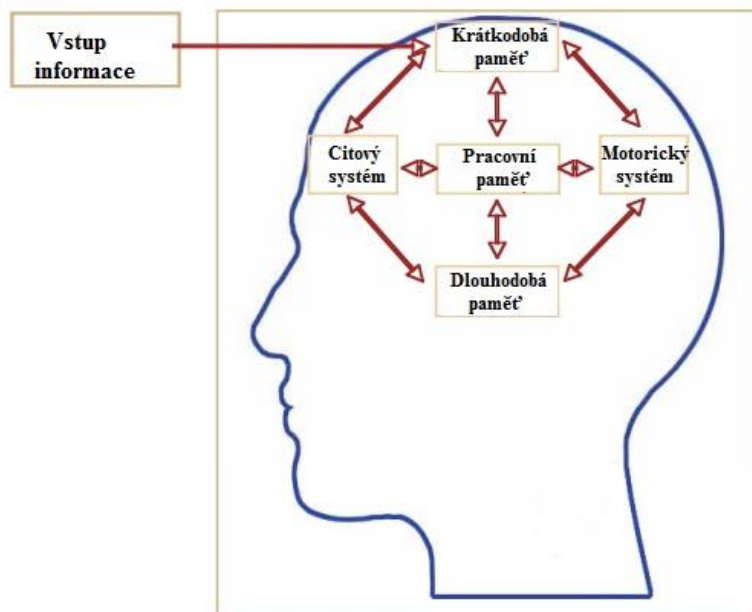
## 2.3 Psychologické základy pojmových map

Často se kladou otázky o původu našich prvních pojmů. Ty získáváme jako děti během narození do tří let věku, kdy si začínáme uvědomovat zákonitosti ve světě a postupně je pojmenováváme. Tehdy se jedná především o objev procesu učení. Snažíme se najít a rozlišovat vzory, pravidelnosti událostí nebo předmětů a propojovat je se slovy, která slyšíme. Po třech letech vzniká nová koncepce učení, která je závislá na jazyce. Jedná se o přijímání procesu učení. Dítě často klade otázky, má potřebu si vysvětlovat vztahy mezi starými pojmy, získává nové pojmy a tím utváří i nové celky (Novak, Cañas, 2008).

Novak a Cañas (2008) ve své článku odkazují na Davida Ausubela, který popisuje rozdíl mezi mechanickým a smysluplným učením. Smysluplné učení vyžaduje tři podmínky:

1. Učivo, respektive materiál k vyučování, musí být pojmově jasné, přehledné a předloženo v takovém jazyce, aby se dítěti ztotožnila informace s předchozími znalostmi. Právě k tomuto účelu mohou sloužit pojmové mapy. Děti se naučí, jak správně identifikovat obecné pojmy před výukou o konkrétnějších pojmech.
2. Žák musí mít odpovídající předchozí znalosti, na které může postupně nabalovat nové učivo. Úkolem pedagoga je však zjistit, jak hluboké předešlé znalosti žák má, dříve než začne nové učivo probírat.
3. Žák si sám musí vybrat smysluplné učení. Učitel by měl žáky správně namotivovat a zvolit obtížnost učiva podle předchozích zkušeností žáků. Výukové a hodnotící strategie podporují smysluplné učení, zatímco objektivní testy málokdy vyžadují více než jen mechanické učení, např. krátké odpovědi v testech přímo narušují smysluplné učení.

Lidská paměť je komplexní soubor vzájemně propojených paměťových systémů. Následující obrázek znázorňuje systém paměti lidské mysli a vztahy a vstupy z našich citových a psychomotorických vstupů (Novak, Cañas, 2008).



Obrázek 3: Klíčové paměťové systémy mozku  
(Novak, Cañas, 2008)

Zatímco všechny paměťové systémy jsou vzájemně závislé (a mají údaje jdoucí v obou směrech), nejkritičtějšími pro začlenění poznatků do dlouhodobé paměti je krátkodobá a pracovní paměť. Všechny příchozí informace jsou organizovány a zpracovávány v pracovní

paměti vzájemně působící s poznatky v dlouhodobé paměti. Pracovní paměť je však omezená. Může zpracovat pouze relativně malý počet psychologických jednotek (pět až devět) v jednom okamžiku. To znamená, že vztahy mezi dvěma nebo třemi pojmy jsou omezeny pracovní pamětí z hlediska kapacitního zpracování. Např. když někomu předložíme seznam 10 – 12 písmen nebo číslic, aby si je zapamatoval za krátkou dobu a poté je odříkal, většinou si zapamatuje pouze 5 – 9 z nich (Novak, Cañas, 2009).

Uchovávání informace zjištěné mechanicky stále probíhá v dlouhodobé paměti, stejně jako informace zjištěná smysluplně. Rozdíl je v tom, že při mechanickém učení nedochází k propojení nových poznatků se stávajícími a tím pádem vznikají dva negativní důsledky. Za prvé, informace může být rychle zapomenuta. Za druhé, informace má malý nebo žádný potenciál pro využití v dalším vzdělávání nebo řešení problémů. Proto se ke strukturování velké skupiny poznatků požaduje řádný sled vzájemných vztahů mezi pracovní a dlouhodobou pamětí. Pojmové mapy slouží jako šablony, které pomáhají organizovat znalosti a strukturu. Mnozí žáci a učitelé jsou překvapeni, jak tento jednoduchý nástroj umožňuje smysluplné učení a vytváření výkonných znalostních rámců, které nejen umožňují využívat znalosti v nových souvislostech, ale také zachovat znalosti na dlouho dobu (Novak, Cañas, 2008).

## 2.4 Funkce, klady a zápory pojmového mapování

Pojmové mapy obecně slouží k lepší strukturaci učiva, k přehlednému a smysluplnému učení. Kromě toho ale mohou plnit celou řadu jiných funkcí. Stručný přehled uvádí Bendl a Voňková (2010, s. 22).

- 1) **Organizující** – uspořádat pojmy do pojmové mapy; utřídit myšlenky o nějakém fenoménu; zaznamenávat klíčové pojmy, vztahy a hierarchické úrovně z dokumentů;
- 2) **Vizualizační** – znázornit získané znalosti; podrobně popsat celou vytvořenou strukturu;
- 3) **Podpůrná** – podpora kreativity; podpora tvorby myšlenek, nápadů;
- 4) **Inovační** – vytváření nové myšlenky a nových nápadů;
- 5) **Objasňující** – objasňuje nové pojmy; vztahy mezi pojmy, které prohlubuje; vede k pochopení daného učiva;
- 6) **Efektivizační** – zvýší účinnost učení; podporuje smysluplné učení; zlepšuje jazykové schopnosti;

- 7) **Diagnostická** – zjišťuje, kolik informací žáci znají o daném tématu; ukazuje, jak kdo porozuměl textu; diagnostikuje nepochopení;
- 8) **Prezentační** – předkládá celkové myšlenky, které jsou zdůvodněné;
- 9) **Designová** – podporuje uspořádání textu, podobu či průběh výzkumu.

Uhlířová a Laitochová (2012, s. 304) s odkazem na Fishera uvádějí řadu výhod pojmového mapování:

- Ústřední, hlavní či klíčová myšlenka je jasně definována,
- názorné uspořádání umožňuje snadnou orientaci a zopakování,
- prostřednictvím spojení a sousedství určuje vztahy mezi klíčovými slovy,
- vytvořená struktura je prozatímní a organická, umožňuje další přizpůsobování,
- neuzavřená povaha tohoto postupu podněcuje k dalšímu propojování myšlenek,
- každá struktura je individuální a jedinečná, což usnadňuje zapamatování, vybavování a opakování.

I technika pojmového mapování má své nevýhody. Ve své knize na ně upozorňuje Janík (2005, s. 120):

- Přílišná otevřenost – pojmové mapy mohou nabývat nesčetně mnoho podob, jsou originálem a obrazem každého z autorů. Nevýhodu můžeme odstranit tím, že zadáme konkrétní pojmy, ze kterých má být pojmová mapa vytvořena. I zde se však dopouštíme určité chyby, jelikož ubíráme na kreativě autora.
- Generování převážně deklarativních znalostí - často nám pojmová mapa nemusí dávat smysl, pokud k ní neuslyšíme autorův komentář. Proto je nezbytně nutné, ho ke každé mapě dokládat.
- Idiosynkratičnost - charakterizována svérázností a malou mírou porovnatelnosti.
- Subjektivnost - abychom subjektivitě zabránili, bylo by vhodné pojmové mapy prezentovat formou případových studií, které zohlední jejich biografický kontext.

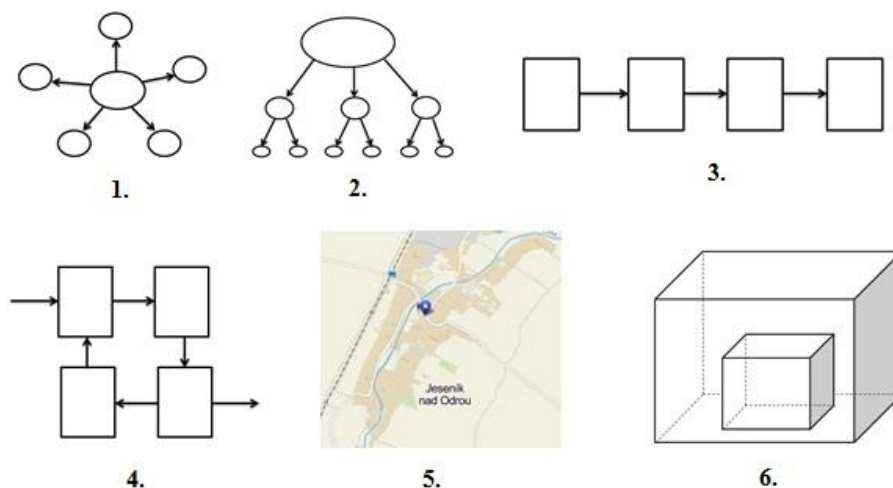
## 2.5 Typy pojmových map

Jak už jsem se zmínila v kapitole Vlastnosti pojmových map, existuje několik typů, jak mapy uspořádat. Samozřejmě nejznámějším a nejpoužívanějším typem je hierarchické uspořádání.

Ne všechny pojmové mapy však tuto podobu musí nabývat. Různé způsoby zobrazování uvádí ve své knize Prokša (2008). Záleží na nás, které uspořádání informací nám vyhovuje nejvíce.

1. **Pavoučí pojmová mapa** – je organizovaná tak, že klíčový pojem se nachází ve středu mapy. Podřazenější pojmy jsou umístěné kolem klíčového pojmu;
2. **Hierarchická pojmová mapa** – prezentuje informace v sestupném nebo vzestupném pořadí podle významu. Nejdůležitější informace je umístěná v horní nebo spodní části mapy;
3. **Pojmová mapa ve formě vývojového diagramu**;
4. **Systémová pojmová mapa** – uspořádává informace ve formátu, který je podobný vývojovému diagramu s přidáním vstupů a výstupů;
5. **Panoramatická pojmová mapa** – prezentuje informaci ve formátu obrazu krajiny;
6. **Trojrozměrná pojmová mapa** – popisuje tok nebo stav informací, které jsou velmi komplikované při dvojrozměrném zobrazení.
7. **Mandalová pojmová mapa** – prezentuje informace ve formátu uzavřených geometrických tvarů. Geometrické uspořádání vytváří zrakové efekty, které upínají pozornost a myšlenky čtenáře.

Druhá nejpoužívanější mapa je vždy sestrojena ve stylu pavouka. Často se tímto stylem vytváří i myšlenkové mapy. Někdy může dojít i k vytvoření mapy, která je sjednocením několika typů najednou. V praxi je typické, že děti nejčastěji používají pavoučí pojmové mapy nebo ten typ, který jim byl předložen jako vzor.



Obrázek 4: Typy pojmových map  
(Pojmové mapy a jejich uplatnění v projektové výuce, s. 6)

## 2.6 Konstrukce pojmových map

Pokud jsme se doposud nesetkali s tvorbou pojmových map, je lepší k první konstrukci zvolit téma, které je nám blízké a které dobře známe. Zároveň by se mělo jednat o omezenou oblast znalostí. Je dobré vytvářet mapy pojmů v závislosti k nějakému problému, experimentu či k otázce, které se snažíme porozumět. To nám vytvoří kontext, který nám pomůže při hierarchickém určení mapy. Nejlepším způsobem jak definovat kontext, je vyslovení ústřední otázky. Otázky, která bude jasně určovat problém nebo kterou by měla pojmová mapa vyřešit. Každá pojmová mapa odpovídá na nějakou ústřední otázku a dobrá volba této otázky může vést k mnohem bohatší mapě pojmů. Při vytváření prvních map mají žáci často tendenci odchylovat se od ústřední otázky. Vytvořená pojmová mapa se sice týká tématu, ale na tuto otázku neodpovídá (Novak, Cañas, 2008).

Jakmile budeme mít ústřední otázku vyřešenou, můžeme začít hledat pojmy, které se s tématem pojí. Výběr 15 – 25 pojmů by měl být dostačující (Novak, Cañas, 2008). Poté je vhodné seřadit pojmy od nejabstraktnějších a všeobecných až po konkrétní a specifické. Nejabstraktnější pojmy umístíme nahoru, konkrétnější pojmy dolů. Provedeme shrnutí. To spočívá ve sdružování pojmů, které jsou na stejné úrovni abstrakce a ty, které mají blízké vzájemné vztahy. Následuje uspořádání. Je vhodné si zvolit typ pojmové mapy a pojmy poté uspořádat do zvoleného diagramu. V závěru je důležité vytvořit propojení mezi jednotlivými pojmy a jejich vztahy popsat (Prokša, 2008).

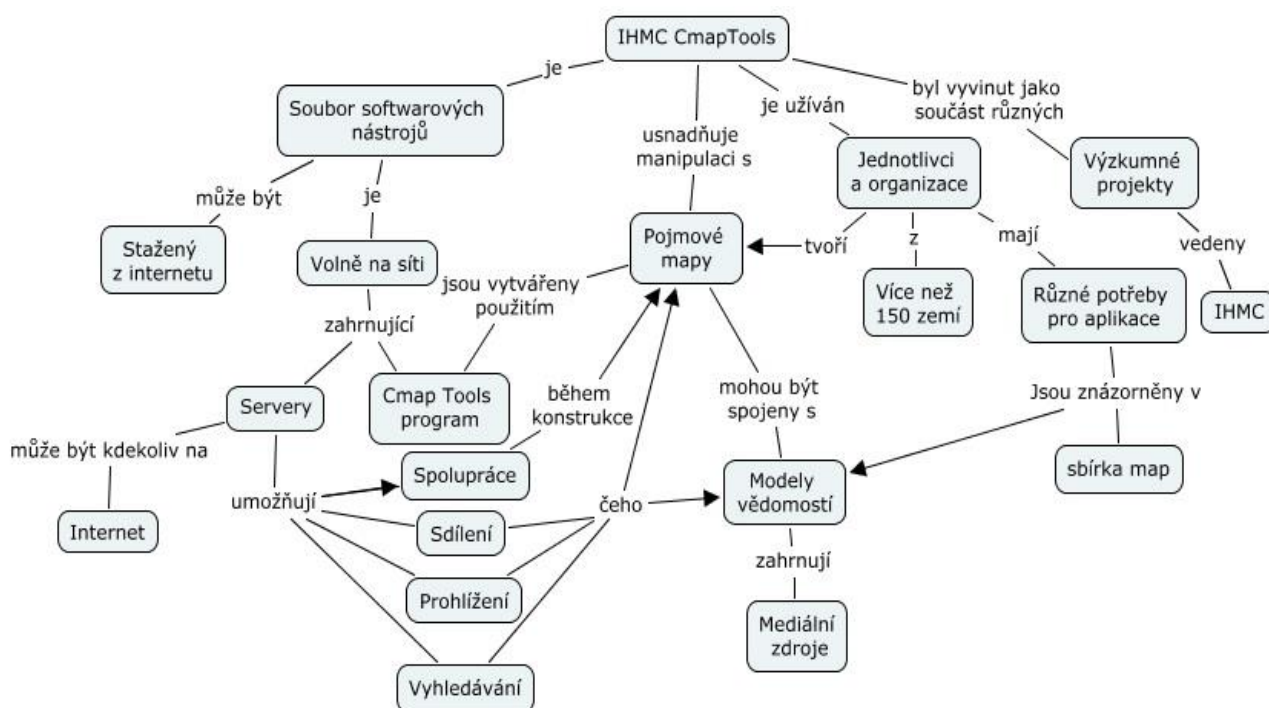
Je důležité si uvědomit, že pojmová mapa není nikdy dokončena. Nejedná se o ukončený proces ani statickou strukturu. Pojmové mapování je proměnlivé v čase (Uhlířová, Laitochová, 2012). Předběžná pojmová mapa je většinou několikrát upravována,

někdy i rozšířena o jiné pojmy. Kvalitní pojmové mapy vzniknou až většinou po třetí úpravě (Novak, Cañas, 2008). Dle mého názoru ale ani třetí úprava nemusí být finální.

Dříve byly pojmové mapy vytvářeny především v papírové tvorbě. Papírové formy však s sebou nesly mnoho nevýhod. Struktura pojmových map tímto stylem byla velmi časově náročná. Autor pojmové mapy musel vytvářet mapu několikrát. Nemohl s pojmy libovolně zacházet. Jakmile se v mapě nacházelo pár změn a prepisů, mapa se stávala nepřehlednou. Proto pro tvorbu pojmových map byla vytvořena celá řada softwarů. Používání softwarů při vytváření pojmové mapy nám zjednodušuje práci při případném prepisování pojmů a vztahů a při přidávání nových pojmů (Bendl, Voňková, 2010, s. 23).

Jedním z nejpoužívanějších a nejznámějších softwarů na tvorbu map je již dříve zmíněný IHMC CmapTool. Je vhodný pro všechny věkové kategorie. Byl vyvinut jako součást různých výzkumných projektů vedených IHMC. Je používán po celém světě, ve více než 150 zemích a je přeložen do 17 jazyků, včetně českého. Používají ho jak jednotlivci, tak organizace. Program je volně přístupný na webu a společnost ho nabízí ke stažení na jejich webových stránkách (<http://www.ihmc.us/cmaptools.php>).

Na níže uvedeném obrázku se nachází pojmová mapa, která shrnuje výše uvedené informace o softwaru IHMC CmapTool. Je přeložena z anglického originálu a vytvořena v programu CmapTool.

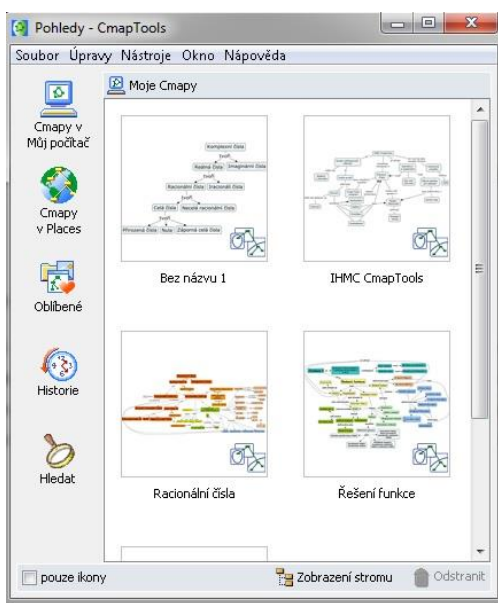


Obrázek 5: Pojmová mapa IHMC Cmap Tool  
(IHMC, Root Cmap: General Description of Software)

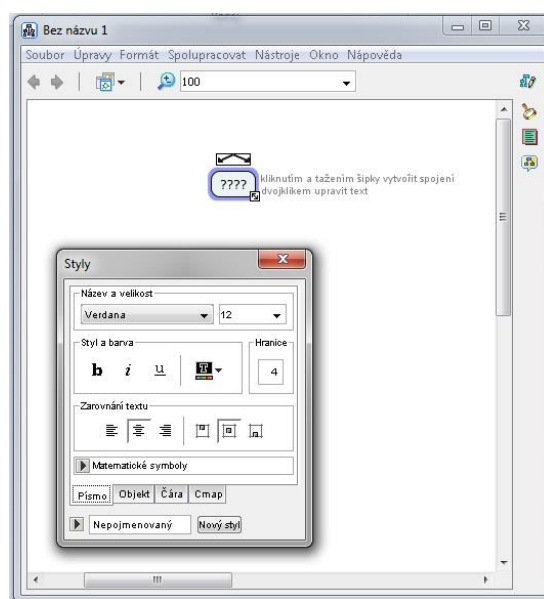
### 2.6.1 Počítačový program CmapTool

K použití a stažení počítačového programu Cmap Tool z internetu je nutné se zaregistrovat na stránkách společnosti IHMC a vyplnit několik základních údajů. Po vyplnění je možné program zdarma stáhnout a nainstalovat. Při spuštění programu se nám jako první zobrazí okno „Pohledy - CmapTool“ – obrázek 7. Zde se ukládají všechny vytvořené pojmové mapy. Pokud jste ještě žádnou nevytvořili, okno bude prázdné.

Novou mapu pojmů vytvoříme kliknutím na *Soubor* a *Nová mapa*. Objeví se nové okno, v jehož středu je napsané *dvojklikem vytvořit pojem*. Tedy dvojnásobným kliknutím myši se nám objeví nové okno nesoucí název *Bez názvu 1* a okno s názvem *Styly* – obrázek 6. Ve větším okně se vytvořil první pojem, do kterého místo otazníku můžeme napsat slovo. Poté kliknutím a tažením šipky vytvoříme spojení, na jehož druhém konci vznikne další pojem. Spojení je nutné popsat. Tímto stylem se vytváří pojmová mapa. Pojmy je možné smazat, přesunout, přepsat či změnit.



Obrázek 7: Okno po spuštění CmapTool



Obrázek 6: Vytváření pojmu v programu CmapTool

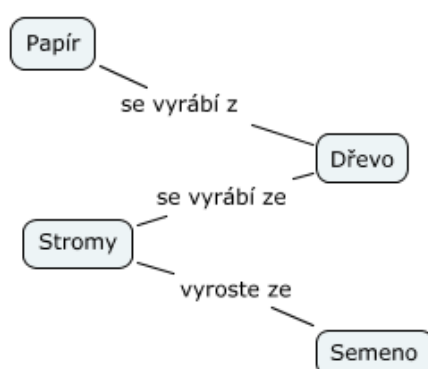
Tabulka *Styly* nám dovoluje upravovat *Písmo*, *Objekt*, *Čáry* a *Cmap*. Pomocí této tabulky je možno pojmovou mapu upravit podle svých představ. Program dává možnost zvětšení či zmenšení písma, vybarvení jednotlivých objektů (pojmů) nebo např. upravení spojovacích čar. Práci můžeme také obohatit barvami. Typy blízkých či rozdílných pojmů můžeme vyjádřit nejen tvarem „rámečku“, ale i odlišnou barvou výplně daného obrazce nebo odlišnou barvou použitého písma (Mareš, 2011, s. 224).

Tento software umožňuje uživateli propojit různé zdroje (fotografie, obrázky, grafy, videa, diagramy, tabulky, texty, odkazy na webové stránky nebo jiné pojmové mapy) umístěné kdekoli na internetu nebo ve svém vlastnictví (Novak, Cañas, 2008). To vše jen kliknutím myši na tlačítko *Úpravy* a vybrat *Přidat webovou stránku*. Při přidávání obrázků či videí je dobré je první přidat do okna *Pohledy - CmapTool* a poté je jen přetáhnout do konkrétního pojmu.

Pro jednodušší práci s tímto softwarem společnost IHMC vytvořila pomocné videa, kde je znázorněno, jak s programem pracovat. Videa jsou zpřístupněna na webových stránkách společnosti (<http://cmap.ihmc.us/videos/index.php>).

### 2.6.2 Chyby při konstrukci

Při konstrukci pojmových map žáci často chybují tím, že vytvářejí tzv. „věty v políčkách“. Tedy celé věty použité jako pojmy. Někdy se stává, že věty by mohly vytvořit část pojmové mapy. Dalším ukazatelem špatného pochopení látky může být vytváření tzv. „provazových map“ (Novak, Cañas, 2008).



Obrázek 8: Provazová mapa  
(Novak, Cañas, 2008, s. 13)

Žáci se shodují, že je pro ně často obtížné vyjádřit slovy spojení mezi jednotlivými pojmy. Důvodem je špatné pochopení vztahu mezi pojmy nebo samotného významu pojmu. Zaměřují-li se žáci na vhodné spojovací tvrzení a určení nejvýznamnějších a nejužitečnějších příčných vazeb, mohou záhy odhalit, že každý pojem by mohl být příbuzný každému jinému pojmu. Tento proces hodnocení a sjednocení znalostí je považován za vysokou úroveň poznávacího výkonu. Pojmové mapování je jednoduchý způsob, jak podpořit vysokou úroveň poznávacího výkonu, pokud je tento proces dělán dobře. Proto může být pojmové mapování silným hodnotícím nástrojem. Vidíme tedy, že mapy pojmů jsou nejen mocným nástrojem pro

zachycení, představování a uchování znalostí jednotlivců, ale také nástrojem pro vytváření nových znalostí (Novak, Cañas, 2008).

## **2.7 Hodnocení pojmových map**

V literárních zdrojích, které se věnují problematice pojmových map, najdeme několik přístupů ke kvantifikaci a interpretaci žáky vytvořených pojmových map. Prokša (2008) a J. D. Novak (Novak, Cañas, 2008) navrhuje neurčovat dopředu jediný, konečný a neměnný počet bodů. Shodují se pouze na postupu a kritériích, pomocí kterých nakonec určíme bodový zisk žákům za danou pojmovou mapu:

Jejich hodnotící kritéria můžeme takto shrnout:

- Za každé přijatelné slovně charakterizované spojení dvou pojmů přidělit jeden bod;
- Za každou přijatelnou hierarchickou úroveň v pojmové mapě přidělit pět bodů;
- Za každé přijatelné slovně charakterizované křížové spojení pojmů (spojení dvou různých pojmů na různé hierarchické úrovni) přidělit deset bodů. Méně významné spojení ohodnotit dvěma body;
- Za určování konkrétních příkladů, tedy odlišných všeobecných pojmů od konkrétností, dávat za každý určený příklad v pojmové mapě jeden bod.

Z jiného pohledu zase k hodnocení pojmových map přistupuje Bendl (Bendl, Voňková, 2010, s. 28), se kterým souhlasí Uhlířová a Laitochová (2012, s. 305). Výše uvedení se při hodnocení pojmových map zaměřili na analýzu:

- Míry abstrakce (vymezená hierarchie mezi zvolenými pojmy)
- Úplnosti (přítomnosti všech relevantních pojmů dané oblasti)
- Identifikace existujících vazeb a jejich správného vymezení
- Míry grafické čitelnosti (přehlednosti vizuálního zpracování)

### 3 Využití pojmových map v matematice

V přírodních vědách mají pojmové mapy poměrně velké uplatnění. V těchto vědách je nutné pracovat s pojmy abstraktními, jejichž pochopení je důležité pro porozumění učiva. V matematice se nachází celá řada pojmů. Žák by se měl v průběhu svého studia snažit pojmům porozumět, aby je nadále mohl používat. Pojmové mapování je výuková metoda, která usnadňuje pochopení složitějších a obtížně představitelných pojmů.

Pojmové mapy můžeme ve výuce použít už v úvodu vyučující hodiny. Mohou sloužit k rychlému a smysluplnému zopakování doposud probraného učiva, kdy poté učitel na vědomosti ve výuce navazuje. Pojmové mapy mohou ale taky vytvářet „pomyslnou“ osnovu hodiny. Prostřednictvím pojmových map učitelé mohou nastítnit, co se bude v hodině probírat. Více se ale metoda pojmového mapování uplatňuje při závěrečném pochopení probraného učiva. Učitel rozpozná, kterou část látky žák dokonale pochopil, a kterou má ještě popřípadě zopakovat. Doporučuje se však vytvořit pojmovou mapu se žáky před probráním učiva a poté, po probrání učiva. Žák si sám uvědomí, kolik se dozvěděl nových informací a učivo si rekonstruuje (Kepřtová, 2009).

Existuje několik způsobů, jak pojmové mapy ve výuce používat. Můžeme žákům zadat centrální pojem a nechat volně pracovat jejich fantazii. V tomto případě se pojmové mapy jednotlivých žáků budou hodně lišit. Další možností je zadání centrálního, ale i ostatních pojmů. Žáci zde mají za úkol všechny pojmy propojit a nalézt k nim vhodné vztahy. K opakování se často používají pojmové mapy k doplňování, které už mají pevně danou strukturu. V těchto mapách je vynecháno několik pojmů či vztahů, které mají žáci za úkol doplnit.

Pojmové mapování přináší výhody žákům motivovaným při učení, žákům se schopností třídit učivo a vyvozovat závěry, žákům, kteří mají dobré verbální schopnosti, vizuální představitelost a těm, kteří se ve svém stylu učení opírají o vizuální zpracování informací (Chalupová, 2006).

Pojmové mapování, podle Uhlířové a Laitochové (2005, s. 304), které odkazují na Mareše, žákům usnadňuje:

- Pochopení učiva,
- „překódování“ do podoby, která se lépe pamatuje,
- zapamatování učiva,
- vybavování učiva (externí paměť),
- rekonstruování učiva, pokud přibývají nové poznatky.

### 3.1 Pojmové mapy a plánování kurikula

Pojmové mapy mohou být nesmírně užitečné při plánování osnov. Velmi výstižným způsobem prezentují klíčové pojmy a principy, které mají být vyučovány. Hierarchická organizace pojmových map nabízí další optimální sled instruktážního materiálu. Základní charakteristika smysluplného spočívá v začlenění nových poznatků do rámců předchozích znalostí. Výuka obecnějších pojmů směřující ke konkrétnějším informacím vede k podpoře a posílení smysluplného učení. Proto při plánování kurikula musíme vytvořit nejprve globální „makro mapu“, která ukazuje hlavní myšlenky plánu, či celé osnovy. A poté vytvořit specifické „mikro mapy“, aby byla znázorněna struktura znalostí pro velmi specifickou část vzdělávacího programu (Novak, Cañas, 2008).

Použití pojmových map při plánování kurikula pomáhá žákům pochopit význam pojmů. Mnozí žáci mají problém s vybráním nejdůležitějších pojmů v textu. Často problém pramení ze vzoru učení, který vyžaduje pouze memorování informací, a ne hodnocení informací. Žáci si nedokáží pojem objasnit a zařadit ho do výrokových rámců. To vede k učení jako změti faktů, dat, jmen, rovnic nebo pravidel, které si uloží do paměti. Proto je pro žáky neoblíben předmět matematika či historie. Učí se pouze nazpaměť postupy a informace, které nemají propojeny. Učivo je pro ně tedy obtížné a ztrácí o něj zájem. Při používání pojmových map ve výuce můžeme vidět proměnu neúspěšných žáků v žáky úspěšné. Pojmové mapy jim pomohou utříbit si své znalosti a propojit je. Díky nim získají žáci kontrolu nad daným předmětem (Novak, Cañas, 2008).

## 4 Vlastní tvorba pojmových map

Jednou z největších překážek při porozumění matematice je její jazyk, který je příliš abstraktní (Delventhal, Kissner, Kulick, 2004, s. 9). Při výuce matematiky se klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům, pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům (RVP, 2007, s. 29).

Jedním z dílčích cílů bakalářské práce je vytvořit návod pro konstrukci pojmových map v podobě metodické příručky. K jejímu zpracování jsme přistoupili po získání teoretických znalostí o pojmovém mapování, nabytých z první části práce. V dalších krocích teoretické znalosti využijeme pro tvorbu konkrétních pojmových map k pojmům školské matematiky. Tyto pojmy se mohou zdát příliš abstraktní, proto jsou v pojmových mapách vysvětleny pomocí pojmů konkrétnějších.

V této kapitole se nacházejí celkem tři pojmové mapy, rozebírající oblast geometrie. Rámcový vzdělávací program rozděluje vzdělávací obsah vzdělávacího oboru *Matematika a její aplikace* na čtyři tematické okruhy. Pomocí pojmového mapování je nahlédnuto do jednoho ze čtyř těchto okruhů.

Oblast geometrie je v Rámcově vzdělávacím oboru pro základní vzdělávání poměrně hodně zastoupena, jak popisuje podkapitola 4.1. Nicméně musím z vlastní zkušenosti podotknout, že se nejedná o oblast, která by byla pedagogy považována za nejdůležitější. Přitom do oblasti geometrie spadá mnoho učiva, které je snadné převést na učivo v praxi. Všechny pojmové mapy byly vytvořeny v počítačovém programu CmapTool za postupu, který je uveden ve druhé kapitole.

Jak už bylo zmíněno v kapitole 2.4, jedním z nedostatků pojmových map je jejich subjektivnost. Často nám pojmová mapa nemusí dávat smysl, pokud k ní neuslyšíme autorův komentář. Proto je nezbytně nutné, ho ke každé mapě dokládat. Z tohoto důvodu je ke každé mapě doložen komentář, který čtenáře přivede na myšlenky autora map.

Při tvorbě pojmových map, bylo vycházeno z Rámcově vzdělávacího programu pro základní vzdělávání, tak, aby bylo možné pojmové mapy využít i při vyučování na těchto typech škol. Mapy jsou zároveň obohaceny i poznatky ze středního, či vysokoškolského vzdělání. Nicméně pojmy, které nepatří do Školního vzdělávacího programu pro základní vzdělání, lze jednoduše z map smazat nebo vyřadit.

Celým komentářem jsou proloženy části vytvořených pojmových map, tak aby měl čtenář představu, která část pojmové mapy je rozebírána. Celé pojmové mapy však v práci obsaženy nejsou, protože jsou velice rozsáhlé. Kvůli malému formátu by byly špatně čitelné.

Kvalitní formu pojmových map lze poté nalézt v příloze, kterou ve formě elektronické tvoří samostatné formáty PDF nebo plakáty ve formě tištěné.

V každé pojmové mapě jsou pojmy barevně rozlišeny z důvodu zvýšení přehlednosti. Pojmy, týkající se určité oblasti, jsou zaznačeny stejnou barvou. V pojmových mapách nalezneme i obrázky, které slouží k lepšímu vizuálnímu zapamatování.

V komentářích se čtenář setká se slovy, které jsou vytištěny tučně. Tato slova symbolizují jednotlivé pojmy z map. Tučné označení usnadňuje čtenáři vyhledávání abstraktních pojmů v textu.

K práci s pojmovými mapami bych doporučila využití interaktivní tabule, která umožňuje například část pojmové mapy zakrýt, či zvýraznit pojmy a vztahy, které jsou pro nás v současné chvíli nejdůležitější.

## **4.1 Geometrie v rovině a v prostoru v RVP**

Jak už bylo zmíněno, jedním z okruhů Rámcově vzdělávacího programu (RVP) v oboru *Matematika a její aplikace* je Geometrie v rovině a v prostoru. V rámci tohoto okruhu by žáci měli zvládnout určovat a znázorňovat geometrické útvary a geometricky modelovat reálné situace, hledat podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomovat si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učit se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací (RVP, 2007).

Klade se tedy důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům, pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Žáci si postupně osvojují některé pojmy, algoritmy, terminologie, symboliku a způsoby jejich užití (RVP, 2007, s. 29). A právě jedním z nejlepších postupů k pochopení tohoto učiva jsou pojmové mapy.

Už na prvním stupni se žáci seznamují se základními útvary v rovině i v prostoru, hledají jejich výskyt v realitě, umí je pojmenovat a vymodelovat. Na druhém stupni už jsou schopni charakterizovat a třídit základní rovinné útvary, odhadovat a vypočítat obvod a obsah, načrtnout je a sestrojit. Základní prostorové útvary (tělesa) žáci dovedou charakterizovat, analyzovat jejich vlastnosti, odhadovat a vypočítat jejich objem a povrch. Umí načrtnout síť základních těles a načrtnout i sestrojit obraz těchto jednoduchých těles v rovině (RVP, 2007).

Níže uvedená pojmová mapa vychází z tohoto tematického okruhu a zaměřuje se konkrétně na prostorové útvary. Zároveň charakterizuje a třídí jednotlivé prostorové útvary a pomáhá žákovi se v tomto učivu zorientovat.

## 4.2 Pojmová mapa - tělesa

**Geometrické těleso** je prostorový omezený souvislý geometrický útvar. Jeho hranicí nazývanou také povrchem je uzavřená plocha. (Pomykalová, 2009, s. 123). Geometrické útvary v prostoru rozdělujeme do dvou skupin - mnohostěny a tělesa rotační.

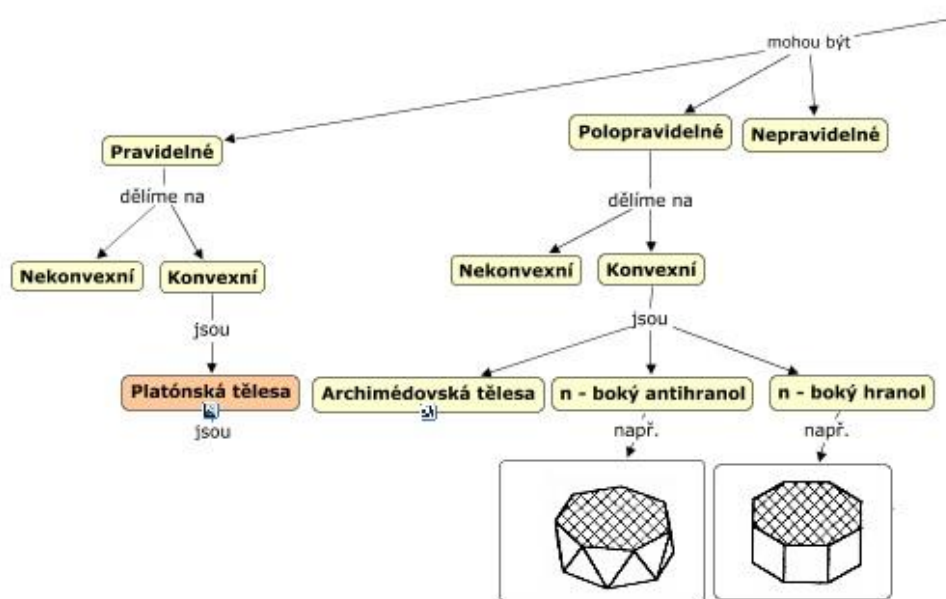
**Mnohostěn** je množina všech bodů v prostoru ležících uvnitř a na mnohostěnové ploše, která je sjednocením  $n$  hraničních mnohoúhelníků ( $n \geq 4$ ) ležících v různých rovinách tak, že strana každého z nich je zároveň stranou jiného mnohoúhelníku (Vošický a kol., 2007, s. 73).

Tak jako mnohoúhelníky, tak i mnohostěny dále rozdělujeme na konvexní a nekonvexní. Každý **konvexní mnohostěn** vznikne jako průnik konečného počtu poloprostorů. S každými dvěma body  $X, Y$  obsahuje konvexní mnohostěn i celou úsečku  $XY$  (Pomykalová, 2009, s. 127). Pro **nekonvexní útvary** předešlá tvrzení neplatí. Pro konvexní mnohostěny platí Eulerova věta, kterou uvádí Pomykalová (2009, s. 127).

*Věta:* Označíme-li  $s$  počet stěn,  $h$  počet hran,  $v$  počet vrcholů konvexního mnohostěnu, pak

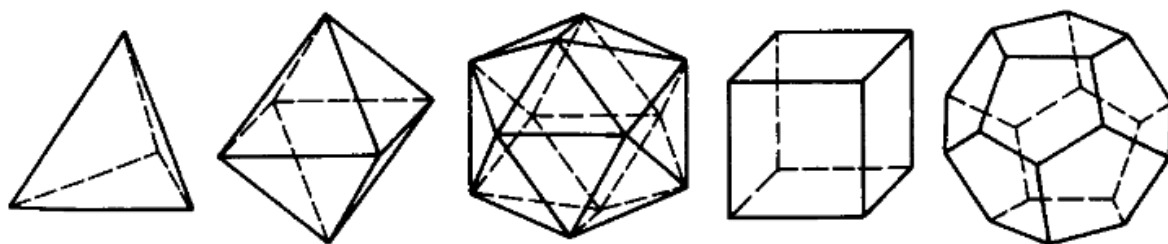
$$s + v = h + 2.$$

Mnohostěny dělíme na pravidelné, poloprávidelné a nepravidelné, což můžeme vidět na obrázku 9, který znázorňuje rozdělení v pojmové mapě.



Obrázek 9: Rozdělení mnohostěnu – část pojmové mapy tělesa

**Pravidelné mnohostěny** mají všechny stěny shodné tvořené pravidelnými  $n$  –úhelníky ( $n \geq 4$ ) a z každého vrcholu vychází stejný počet hran. Součet vnitřních úhlů pravidelných  $n$  –úhelníků u jednoho vrcholu musí být menší než  $360^\circ$  (Pomykalová, 2009, s. 129). Pravidelné konvexní mnohostěny nazýváme **Platónská tělesa**. V historii se o tato tělesa zajímalo mnoho významných osobností, např. Eukleides, Platón, Archimédes, Kepler aj. (Chmelíková, Moravec, 2007, s. 3). Jsou však pojmenované po Platónovi, který dal těmto tělesům nový filozofický směr. Věřil, že atomy živlů, ze kterých je tvořen svět, mají tvar pravidelných konvexních mnohostěnu (Jiříčková, 2013, s. 6). Existuje celkem pět Platónských těles. Na obrázku 10 se nachází zleva **pravidelný čtyřstěn (tetraedr)**, **pravidelný osmistěn (oktaedr)**, **pravidelný dvacetistěn (ikosaedr)**, **pravidelný šestistěn (hexaedr)** a **pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr)**. Pokud jsou stěnami pravidelného mnohostěnu rovnostranné trojúhelníky, jedná se buď o tetraedr, oktaedr nebo ikosaedr. Pokud jsou stěnami čtverce, vznikne hexaedr. Stěny tvořené pravidelnými pětiúhelníky vytváří dodekaedr. Vnitřní úhly pravidelného šestiúhelníku mají velikost  $120^\circ$ , takže žádný pravidelný mnohostěn nemůže mít pravidelné šestiúhelníky jako své stěny. Z tohoto důvodu je pravidelných mnohostěnu jenom pět (Pomykalová, 2007).



Obrázek 10: Platónská tělesa  
(Pomykalová, 2007, s. 129)

V přírodě je velmi snadné Platónské tělesa nalézt. Především se vyskytují ve vazbách atomů minerálů, např. krystaly pyritu vytváří dvanáctistěn, krystaly bóru se vyskytují ve dvacetistěnech, sůl kamenná je charakteristická krychlovou soustavou. V říši živočichů Platónská tělesa představují takzvaní Mřížovci (Jiříčková, 2013).

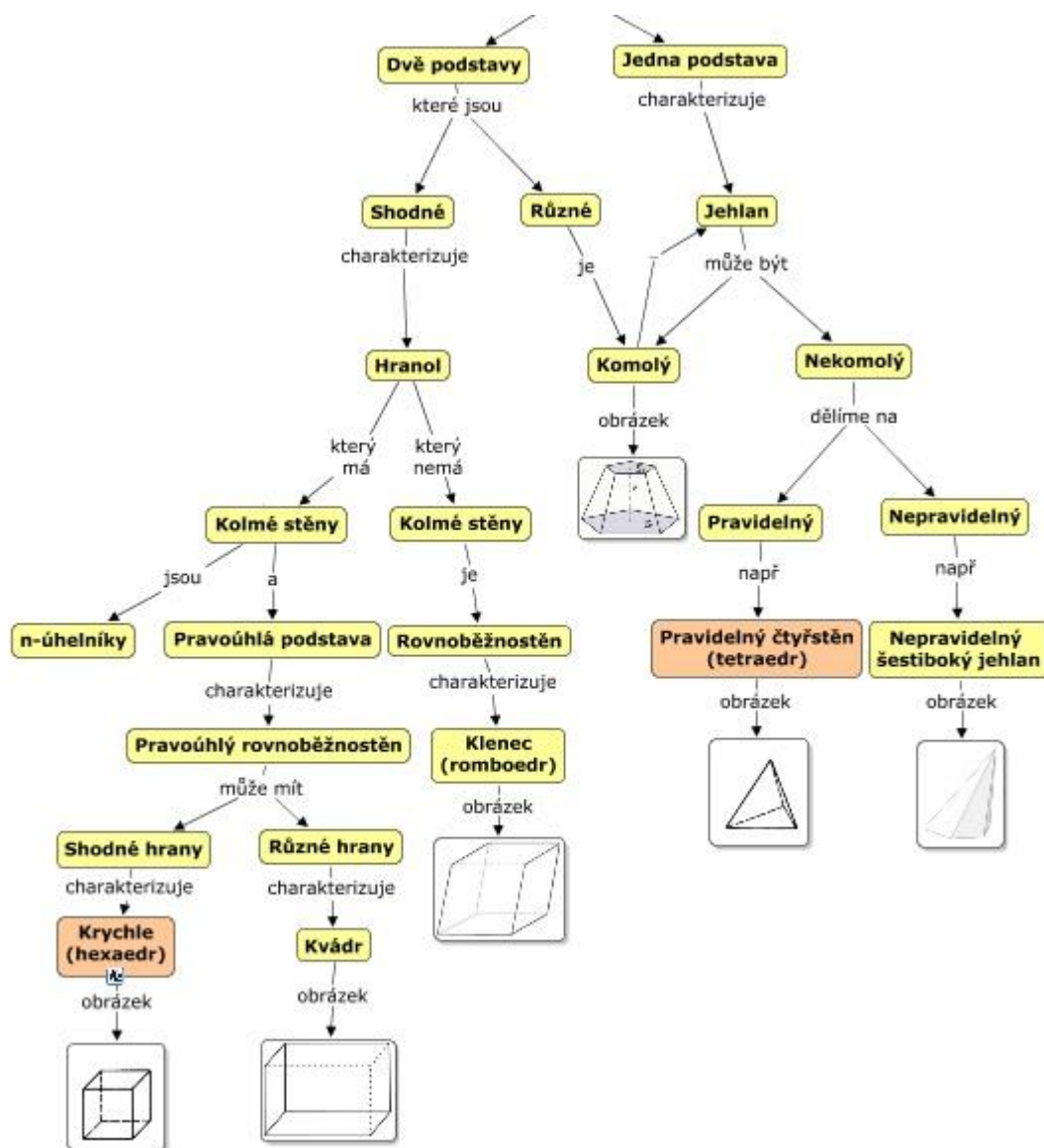
**Polopravidelné mnohostěny** můžeme také rozlišit, podle toho, zda jsou konvexní nebo nekonvexní. Konvexní polopravidelná tělesa tvoří tři skupiny těles. První skupinu charakterizují mnohostěny, které vznikají ořezáním těles Platónských a jejichž stěny jsou pravidelné  $n$  –úhelníky. Tato tělesa nazýváme **Archimédovská**. Pojmová mapa o Archimédovských tělesech se nachází v příloze č. 3. Nejzákladnější informace a komentář k mapě je uveden na str. 33 - 34. Do druhé a třetí skupiny patří **hranol** a **antihranol**.

Podstavami hranolů i antihranolů jsou  $n$  – boké úhelníky. Bočními stěnami hranolu jsou čtverce, kdežto u antihranolů jsou to rovnostranné trojúhelníky (Chmelíková, Moravec, 2007). Některá **nepravidelná tělesa** budou ještě v textu uvedena.

Tak, jako je uvedeno v pojmové mapě i na obrázku 11, budeme mnohostěny dělit podle počtu stran na hranoly a jehlany. **Jehlan** je charakteristický pouze **jednou** dolní **podstavou**, která je tvořena mnohoúhelníkem, a bočními stěnami ve tvaru trojúhelníků. Společný bod všech stěn se nazývá vrchol jehlanu. Vzdálenost vrcholu od roviny podstavy je výška jehlanu. Podle počtu bočních stěn rozeznáváme jehlan trojboký, čtyřboký, ...,  $n$  – boký.

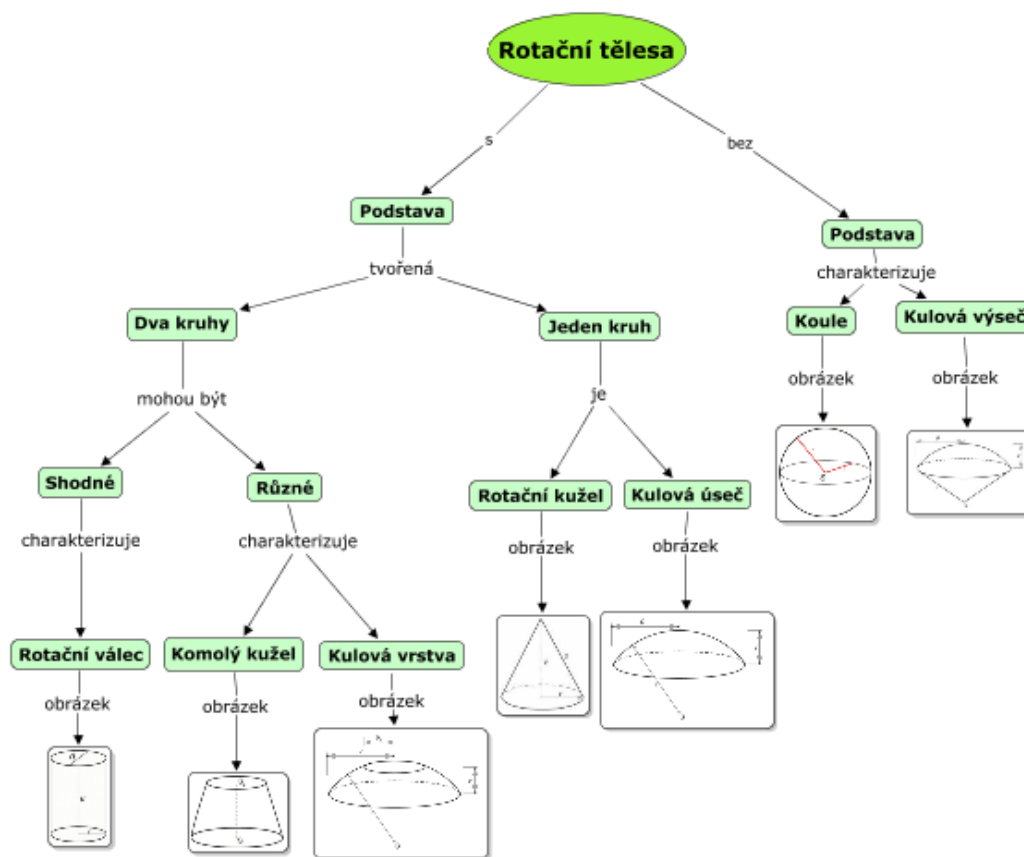
Jehlan se nazývá kolmý, jestliže existuje kružnice vepsaná jeho podstavě a kolmice vedená vrcholem jehlanu prochází právě jejím středem. Jehlan, který není kolmý, se nazývá kosý. Rovina rovnoběžná s rovinou podstavy rozdělí jehlan na dvě tělesa – **jehlan (nekomolý)** a **komolý jehlan**. Z předchozí věty tedy vyplývá, že komolý jehlan má ve skutečnosti dvě podstavy, které jsou různé. Nekomolý jehlan můžeme dále rozdělit podle toho, zda je pravidelný, či nepravidelný. Je-li podstavou jehlanu pravidelný mnohoúhelník, hovoříme o **pravidelném jehlanu**. Příkladem pravidelného nekomolého jehlanu je **pravidelný čtyřstěn (tetraedr)**. Kdežto **nepravidelný jehlan** zastupuje  **$n$  – boký mnohostěn** (Vošický a spol., 2007).

**Hranol** má oproti jehlanu (kromě komolého jehlanu) podstavy dvě – horní a dolní. Pokud jsou tyto podstavy různé, hovoříme o **komolém jehlanu**. Pokud jsou však **shodné**, jedná se o hranol. Vzdálenost podstav je výška hranolu. Podle počtu stěn rozlišujeme hranol trojboký, čtyřboký, pětiboký, ...,  $n$  – boký. Pokud **nejsou stěny** hranolu **kolmé** k podstavě, hovoříme o **rovnoběžnostěnu**, který není pravoúhlý. Jako příklad je uveden **klenec (romboedr)**, jehož stěny jsou shodné kosočtverce. Pokud ale **stěny hranolu kolmé jsou**, potom jsou tyto stěny  **$n$  – úhelníky**. Jestliže útvar obsahuje kolmé stěny hranolu a **pravoúhlou podstavu**, jedná se o **rovnoběžnostěn**. Ten může mít všechny hrany shodné nebo různé. **Shodné hrany** jsou typické pro **krychli (hexaedr)**, kdežto podle **různých hran** poznáme **kvádr**. Kvádr je tedy kolmý rovnoběžnostěn, jehož podstavou je pravoúhelník. Má všechny tělesové úhlopříčky stejně dlouhé. Krychle je kolmý hranol, jehož všechny stěny jsou čtverce (Vošický a spol., 2007).



Obrázek 11: Mnohostěny – část pojmové mapy tělesa

Geometrická tělesa však nejsou pouze mnohostěny, ale také například **rotačními tělesy**. Rotační tělesa vzniknou rotací rovinného obrazce kolem dané přímky, tzv. osy rotačního tělesa. Tato část pojmové mapy je uvedena na obrázku 12.



Obrázek 12: Rotační tělesa – část pojmové mapy tělesa

Nejjednodušším rotačním tělesem, které **nemá podstavu**, je koule a její kulová výseč. **Koule** je těleso vytvořené rotací kruhu kolem jeho průměru. Střed kruhu je středem koule a poloměr kruhu je poloměrem koule  $r$ . Povrch koule se nazývá kulová plocha, která je tvořena všemi body, jejichž vzdálenost od středu koule  $S$  je rovna poloměru koule  $r$ . Průnik koule s rotačním kuželem, který má vrchol ve středu koule a výšku větší než poloměr koule je **kulová výseč** (Vošický, 2007).

Rotační tělesa s **jednou kruhovou podstavou**, jsou rotační kužel a kulová úseč. Při řezu koule rovinou dostaneme dvě **kulové úseče** (rovina procházející středem  $S$  rozdělí kouli na dvě polokoule). **Rotační kužel** je těleso, které vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jeho jedné odvěsny – výšky kužele  $v$ . Výška rotačního kužele je kolmá k rovině podstavy.

Rotační těleso obsahující **dvě kruhové podstavy**, které jsou **shodné**, je rotační válec, zatímco komolý kužel nebo kulová vrstva jsou charakteristické **dvěma různými kruhovými podstavami**. **Rotační válec** vznikne rotací obdélníku kolem jeho jedné strany. Tato strana je osa válce, její délka určuje velikost výšky  $v$ , délka druhé strany obdélníku určuje poloměr

podstavy válce r. **Komolý kužel** vznikne jako průnik kužele a vrstvy určené rovinou podstavy a rovinou s ní rovnoběžnou, která má s kuželem společné alespoň dva body. Dvě rovnoběžné roviny dělí kouli na **kulovou vrstvu** (Vošický, 2007).

Tato pojmová mapa o tělesech není konečná. Je možné ji dále rozšířit. Přidáním dalších pojmů a vzájemných vztahů by se však stala nepřehlednou. V pojmové mapě rozhodně nejsou obsažena všechna tělesa, protože je jich nekonečně mnoho. Dokonce ani mnohostěny nelze všechny v pojmové mapě uvést. Mapu by bylo možné ještě dále rozšířit například o hvězdčité mnohostěny, deltatopy či nepravidelné a jiné nejen mnohostěny. Bohužel někde musí být každá pojmová mapa ukončena. K sestrojení pojmové mapy byla vybrána pouze taková tělesa, která mají uplatnění zejména v technické praxi, a setkáváme se s nimi v dennodenním životě.

Jak bylo uvedeno ve třetí kapitole, je důležité první sestavit tzv. „makro mapu“, která nám pomůže vytvořit osnovu učiva. Až poté je možné vytvářet „mikro mapy“, které lépe popíší specifickou část učiva. Pojmovou mapu, rozebírající učivo tělesa budeme považovat za „makro mapu“, ke které jsou v následujících podkapitolách zpracovány „mikro mapy“ o krychli a následně o Archimédovských tělesech. Podobným stylem by bylo možné vytvořit mnoho „mikro map“ rozebírající konkrétní geometrické útvary v prostoru. „Mikro mapy“ můžeme používat samostatně nebo je připojit k větším „makro mapám“.

### 4.3 Pojmová mapa – krychle

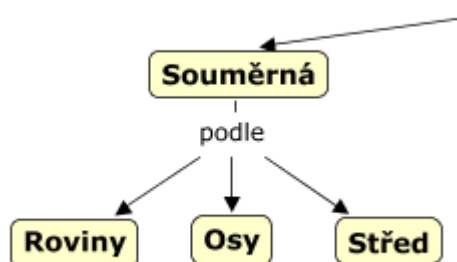
Pojmovou mapu o krychli tedy můžeme označit jako „mikro mapu“ k pojmové mapě tělesa. Tato pojmová mapa je volným pokračováním pojmové mapy o tělesech a zaměřuje se pouze na jedno konkrétní geometrické těleso v prostoru - krychli.

**Krychle**, hexaedr či pravidelný šestistěn je pravidelný konvexní mnohostěn, podrobněji pravidelný čtyřboký hranol. Jak už bylo zmíněno v komentáři pojmové mapy o tělesech, krychle patří mezi pět platónských těles. Hexaedru je podle Platóna přiřazen element „země“ (Ruland, Ferenz, 2013, s. 68). S hexaedrem se pojí i zajímavost týkající se platónských těles. Ruland a Ferenz (2013, s. 69) uvádějí: „Zatímco na kouli je pohlíženo jako na matku platónských těles, hexaedr je považován za jejich otce. Což je zajímavé, protože element země je ženské povahy. Možná právě zde je skryto tajemství stvoření – v mužském útvaru hexaedru a ženské formě živoucí země“. S platónskými tělesy se vždy pojí i tzv. dualita těles. Chmelíková a Moravec (2007, s. 14) uvádějí: „Jedno těleso je duální

k druhému, lze-li je navzájem (při vhodném poměru velikostí) do sebe vepsat tak, že vrcholy jednoho tělesa leží ve středech stěn druhého. Je tedy nutné, aby počet vrcholů jednoho tělesa byl stejný jako počet stěn tělesa druhého (a naopak).“ Krychle je duální s **pravidelným osmistěnem**, což samozřejmě platí i naopak.

S krychlí se v běžném životě neustále setkáváme. Krystaly v soustavě krychlové můžeme spatřit u **solí kamenné**. **Hrací kostky**, doporučené dětem ke hraní, mají většinou také tvar krychle. Jakýkoliv nábytek může být ve tvaru krychle. Jestliže nahlédneme do **jednotek objemu**, zjistíme, že zde se krychle několikrát opakuje, protože krychli představuje  $m^3, dm^3, mm^3, \dots$ .

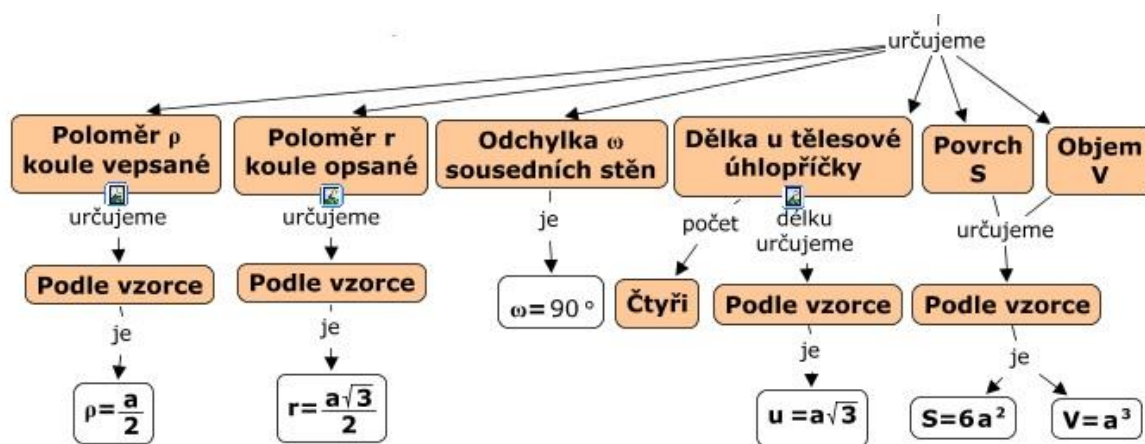
Krychle je geometrický útvar, který je jak středově, osově, tak rovinově souměrný. Středově souměrný je podle svého středu (tj. průsečíku tělesových úhlopříček). Osově souměrný je podle devíti os – třech spojnic středů protilehlých stěn a šesti spojnic středů protilehlých hran. A nakonec je rovinově souměrný podle také devíti rovin, avšak podle tří rovin rovnoběžných se stěnami a procházejících středem krychle a šesti rovin určených dvojicí protilehlých hran (Wikipedie, Krychle). Tuto část pojmové mapy je možné si prohlédnout na obrázku 13.



Obrázek 13: Souměrnost - část pojmové mapy krychle

Krychle je **tvořena stěnami, hrany a vrcholy**. Všechny **šest** stěn má tvar **čtverce**, jsou **shodné** a každé **dvě sousední** k sobě **kolmé**. Dvě z šesti stěn zaujímají funkci **podstav** – **dolní** a **horní**, zbytek tvoří **boční stěny**. **Stěny** krychle nazýváme **sousední** právě tehdy, když mají stěny společnou hranu krychle. Krychle má celkem **dvanáct hran**, které jsou strany čtverce a jsou všechny **shodné**. **Hrany** se nazývají **sousední**, mají-li společný vrchol krychle. **Vrcholy** jsou tedy **sousední**, leží-li na téže hraně. Hexaedr má celkem **osm** vrcholů, což jsou ve skutečnosti vrcholy čtverců.

Chmelíková s Moravcem (2007, s. 6) u krychle určují: objem, povrch, délku tělesové úhlopříčky, odchylku sousedních stěn, poloměr koule opsané a poloměr koule vepsané. Tuto část pojmové mapy zobrazuje obrázek 14.



Obrázek 14: Výpočty – část pojmové mapy krychle

- **Objem  $V$**  krychle se rovná součinu obsahu jedné podstavy a výšky krychle, tj.

$$V = S_p \cdot v = a^2 \cdot a = a^3$$

- **Povrch  $S$**  krychle se rovná součtu obsahů šesti stejných čtvercových stěn, tj.

$$P = 6 \cdot a^2$$

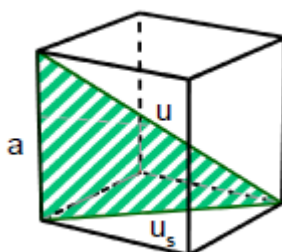
- **Délka  $u$  tělesové úhlopříčky**

Krychle má celkem čtyři tělesové úhlopříčky. Délka  $u$  jedné tělesové úhlopříčky lze odvodit pomocí Pythagorovy věty (obrázek 15). Jestliže  $a$  je velikost hrany krychle,  $u_s$  je úhlopříčka strany krychle a  $u$  je tělesová úhlopříčka, poté platí

$$u^2 = a^2 + u_s^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$$

Po úpravách dostáváme

$$u = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$



Obrázek 15: Výpočet tělesové úhlopříčky  
(Chmelíková, Moravec, 2007, s. 5)

- **Odchylka  $\omega$  sousedních stěn** je zřejmá na první pohled

$$\omega = 90^\circ$$

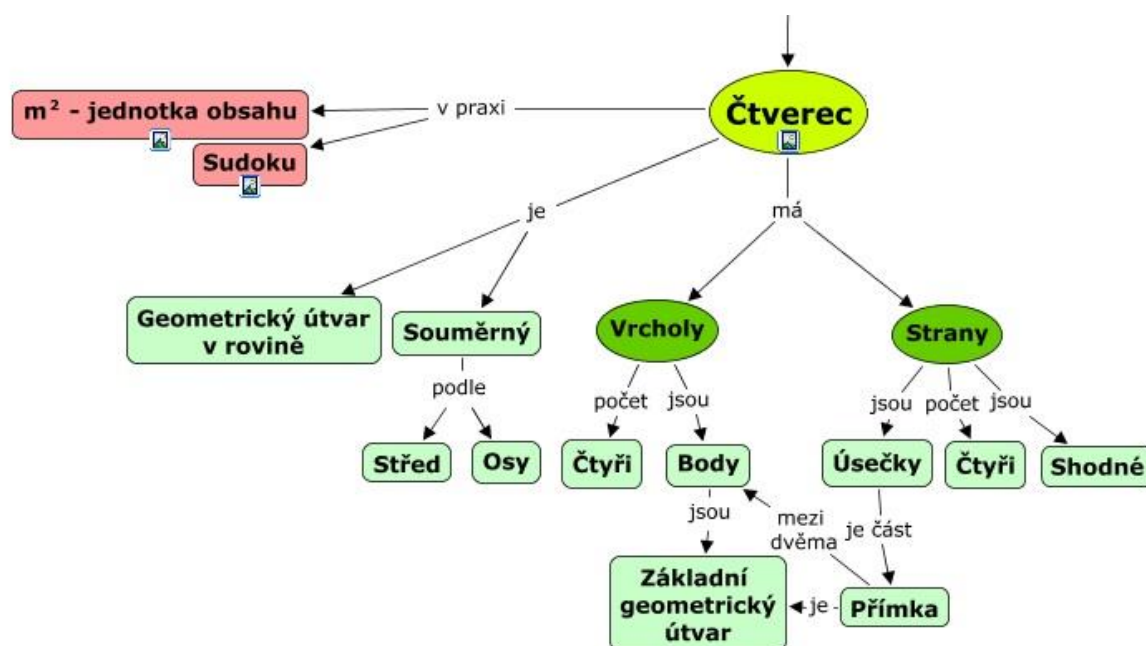
- **Poloměr  $r$  koule opsané** je roven polovině délky tělesové úhlopříčky procházející středem, tedy

$$r = \frac{u}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- **Poloměr  $\rho$  koule vepsané** krychli je vzdálenost středu krychle od libovolné stěny, tedy

$$\rho = \frac{a}{2}$$

Tato pojmová mapa má dva ústřední pojmy. Prvním je krychle, která se však neobjede bez zavedení čtverce. Proto mnoho pojmů směřuje právě k tomuto pojmu. **Čtverec** je rovinný útvar, který řadíme mezi pravidelné čtyřúhelníky. Je zároveň zvláštním případem obdélníku, v němž jsou všechny strany shodné (Delventhal a spol., 2004, s. 369). Čtverci náleží spodní část pojmové mapy o krychli. Tuto část je možné si prohlédnout na obrázku 16.



Obrázek 16: Čtverec – část pojmové mapy krychle

Se čtvercem se v běžném životě setkáváme. Například **jednotky obsahu** představují čtverec nebo logická hra **Sudoku** je sestavená z několika čtverců, které celkově vytváří jeden čtverce. Tento rovinný útvar je **osově i středově souměrný**. Čtverec se skládá ze **čtyř stran** a **čtyř vrcholů**. Vrcholy čtverce můžeme chápat jako **body**. Bod patří mezi **základní**

**geometrické útvary**, a proto se nedefinuje. Strany ve čtverci jsou **shodné** a můžeme je chápat jako čtyři **úsečky**. Úsečku definujeme jako část **přímky** mezi dvěma body. Přímka patří také mezi základní geometrické útvary, tudíž ji nedefinujeme.

U čtverce určujeme obvod a obsah čtverce, délku jeho úhlopříček, poloměr kružnice opsané i poloměr kružnice vepsané. Jestliže  $a$  je délka strany, poté platí:

- **Obvod  $o$  čtverce** se rovná součtu délce jeho stran.

$$o = a + a + a + a = 4 \cdot a$$

- **Obsah  $S$  čtverce** se rovná součinu dvou sousedních stran.

$$S = a \cdot a = a^2$$

- **Délka  $u$  úhlopříčky**

Úhlopříčky ve čtverci mají speciální vlastnosti. Ve čtverci se nacházejí celkem **dvě úhlopříčky**, které jsou na sebe **kolmé** a **navzájem se půlí**. Délka jedné úhlopříčky je

$$u = a\sqrt{2}$$

- **Poloměr  $r_1$  kružnice opsané**

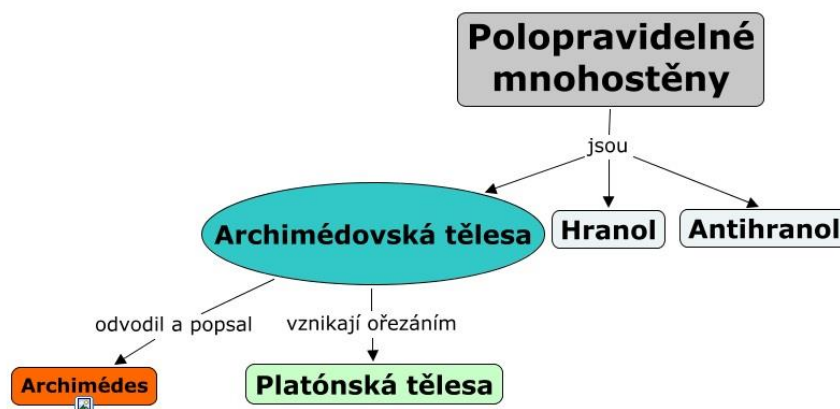
$$r_1 = \frac{u}{2}$$

- **Poloměr  $r_2$  kružnice vepsané**

$$r_2 = \frac{a}{2}$$

#### 4.4 Pojmová mapa – Archimédovská tělesa

V kapitole 4.2 Pojmová mapa – „tělesa“ byly mnohostěny rozděleny na pravidelné, nepravidelné a polopravidelné. Následující pojmová mapa se zaměřuje pouze na **tělesa polopravidelné**. Samozřejmě opět nemůže zachytit všechny z nich, proto byla vybrána pouze **tělesa Archimédovská**. První část pojmové mapy je zachycena na obrázku 17.

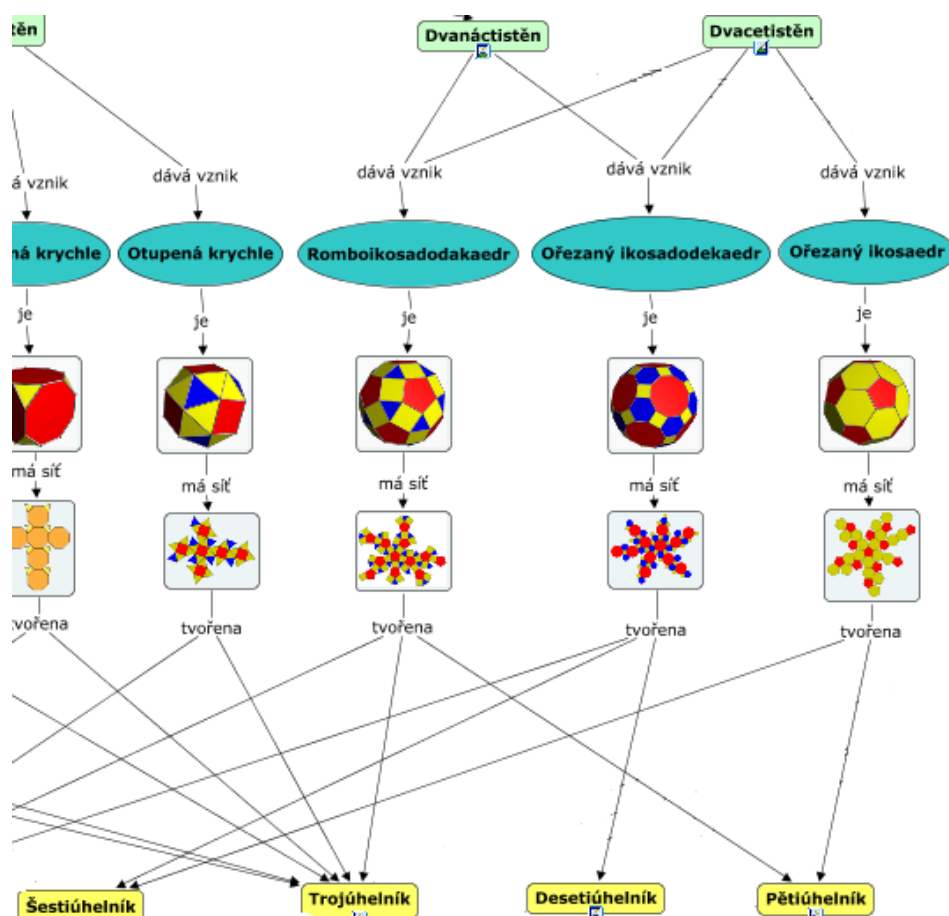


Obrázek 17: Vznik Archimédovských těles – část pojmové mapy Archimédovská tělesa

Ve většině publikací bývá uvedeno, že Archimédovská tělesa odvodil a popsal už **Archimédes**. Podle něj jsou také pojmenována. Archimédes je považován za nejvýznamnějšího vědce klasického starověku, za největšího matematika své epochy a jednoho z největších matematiků vůbec (Wikipedie, Archimédes). Sutton a Nyklová (2011, s. 40) ale ve své knize uvádí, že autorem těchto těles je Kepler: „Kepler byl zřejmě od starověku první, kdo všech třináct těles ve svém díle *Harmonices Mundi* popsal.“ Kromě Archimédovských těles Kepler také popsal dvě nekonečné množiny pravidelných **hranolů** a **antihranolů**, které mají také shodné vrcholy a pravidelné stěny (Sutton, Nyklová, 2011).

Archimédovská tělesa jsou tedy mnohostěny, jejichž stěny jsou tvořeny pravidelnými mnohoúhelníky dvou nebo tří typů a jejichž vrcholy jsou stejného typu (Chmelíková, Moravec, 2007, s. 17). Existuje celkem třináct Archimédovských těles, které Archimédes odvodil takzvaným „ořezáním“ vrcholů nebo hran **platónských těles** tak, aby stěny byly pravidelné konvexní mnohoúhelníky (Jiríčková, 2013, s. 11).

Pojmová mapa uvádí přehled Archimédovských těles. Můžeme zde vyčíst, z jakých Platónských těles tato tělesa vznikají a také jejich tvar a složení.



Obrázek 18: Ořezaný ikosaedr - část pojmové mapy Archimédovská tělesa

Například o **ořzaném ikosaedru** z map vyčteme, že vznikl ořezáním Platónského tělesa **dvacetistěnu** (ikosaedru). Pojmová mapa nám nabízí náhled jak na vzhled celého tělesa, tak na jeho síť, ze které je patrné, že se skládá z pravidelných **pětiúhelníků** a **šestiúhelníků**.

Ikosaedr nebyl vybrán jako příklad náhodně. Mezi Archimédovskými tělesy tvoří jakousi výjimku z hlediska praktičnosti. Ořzaný ikosaedr se totiž stal inspirací pro tvorbu fotbalového míče. Ostatní Archimédovská tělesa už tak snadno v přírodě nenalezneme. Dokonce se se spoustou z nich v běžném životě ani nikdy nesetkáme. Je pro ně však typické, že v přírodě vytvářejí nejrozumnější sloučeniny (Jiříčková, 2013).

V příloze č. 4 se nachází přehled všech Archimédovských těles. Lze z ní vyčíst počet vrcholů, počet hran, počet a tvar stěn či ze kterého Platónského tělesa byla tato tělesa odvozena.

V praxi se můžeme setkat s několika různými názvy Archimédovských těles. Nejčastěji jsou uváděna v latinském jazyce. Zajímavostí však je, že těleso **ořzaný kuboktaedr** je také nazýván jako „*velký rombokuboktaedr*“ a **rombokuboktaedr** bývá někdy označován jako „*rombická krychle*“ či „*malý rombokuboktaedr*“. Obě tato tělesa Platón odvodil z **krychle** a **osmistěnu**. Další podobnou dvojici, která však vznikla ořezáním **dvanáctistěnu** a **dvacetistěnu** tvoří **romboikosadodaktaedr** a **ořzaný ikosadodekaedr**. První z nich je někdy nazýván jako „*malý romboikosadodekaedr*“ a druhý poté „*velký romboikosododekaedr*“.

## Závěr

Bakalářská práce se zabývá pojmovým mapováním, jako jednou z výukových metod, která přispívá k rozvoji kritického myšlení. Pojmové mapování je metoda, která pracuje s pojmy. Matematika je věda, která je na pojmech založena. Proto se pojmové mapování velmi často využívá a doporučuje při výuce tohoto předmětu.

Cílem práce bylo vytvořit metodickou návod, který podporuje rozvoj profesních kompetencí učitele, zejména kompetence oborově předmětové a kompetence didaktické. Práce v první části nabízí pedagogům souhrn teorie. Čtenář se dozví, jaké jsou funkce, typy a vlastnosti tohoto jednoduchého nástroje a jak pojmové mapování umožňuje smysluplné učení a vytváření výkonných znalostních rámců, které nejen umožňují využívat znalosti v nových souvislostech, ale také zachovat znalosti na dlouho dobu. Kapitola 2.6 podává návod na konstruování pojmových map v počítačovém programu CmapTool, který tvorbu pojmových map usnadňuje a ve kterém byly vytvořeny všechny pojmové mapy uvedené v této práci. Druhá část se zabývá pojmovým mapováním přímo v matematice. Je zde objasněno, jak a kdy je vhodné pojmové mapy využívat ve výuce tohoto předmětu. Tato část zároveň předkládá vytvořené pojmové mapy k pojům školské matematiky, ke kterým je přiložen komentář. Komentář není určen ke studiu rozebíraného učiva matematiky, ale má usnadnit pedagogům pochopení vytvořených pojmových map. Tyto pojmové mapy je možné využít při hodinách matematiky na základních či středních typech škol. Komentáře k pojmovým mapám obsahují i informace rozšiřující.

Po prostudování návodu by pedagogové měli umět vytvářet pojmové mapy, užívat pojmové mapování ve výuce matematiky a tím podporovat tvořivé myšlení svých žáků. Myslím si, že tato práce podporuje rozvoj teoretických znalostí jak u učitelů stávajících, tak i budoucích.

Tematika pojmového mapování není předloženou bakalářskou prací vyčerpána a uzavřena. Výsledky práce je možné využít v praxi edukace na základní či střední škole: připravit a realizovat výzkumné šetření s cílem představit a naučit žáky metodu pojmovému mapování, navést je k samostatnému tvoření pojmových map, popsat výhody či nevýhody této výukové metody (z hlediska žáků) a výsledky poté nabídnout vyučujícím.

## Seznam obrázků

Obrázek 1: Pojmové chápání podle G. Edelmana .....	7
Obrázek 2: Pojmová mapa zobrazující klíčové prvky tvorby pojmových map.....	10
Obrázek 3: Klíčové paměťové systémy mozku .....	11
Obrázek 4: Typy pojmových map .....	15
Obrázek 5: Pojmová mapa IHMC Cmap Tool .....	16
Obrázek 6: Vytváření pojmu v programu CmapTool.....	17
Obrázek 7: Okno po spuštění CmapTool.....	17
Obrázek 8: Provazová mapa .....	18
Obrázek 9: Rozdělení mnohostěnů – část pojmové mapy tělesa.....	24
Obrázek 10: Platónská tělesa .....	25
Obrázek 11: Mnohostěny – část pojmové mapy tělesa .....	27
Obrázek 12: Rotační tělesa – část pojmové mapy tělesa.....	28
Obrázek 13: Souměrnost - část pojmové mapy krychle .....	30
Obrázek 14: Výpočty – část pojmové mapy krychle.....	31
Obrázek 15: Výpočet tělesové úhlopříčky .....	31
Obrázek 16: Čtverec – část pojmové mapy krychle .....	32
Obrázek 17: Vznik Archimédovských těles – část pojmové mapy Archimédovská tělesa .....	33
Obrázek 18: Ořezaný ikosaedr - část pojmové mapy Archimédovská tělesa.....	34

## **Seznam tabulek**

Tabulka 1: Srovnání původního a novějšího pojetí pojmových map .....	8
--	---

## Seznam použitých zdrojů

### Literatura

DELVENTHAL, K. M., KISSNER, A., KULICK, M. *Kompendium matematiky*. Praha: Euromedia Group, 2004, 714 s. ISBN 80-242-1227-7.

FISHER, R. *Učíme děti myslet a učit se: praktický průvodce strategiemi vyučování*. 1. vyd. Praha: Portál, 1997, 172 s. ISBN 80-717-8120-7.

JANÍK, T. *Znalost jako klíčová kategorie učitelského vzdělávání*. Brno: Paido, 2005, 171 s. ISBN 80-731-5080-8.

LAITCHOVÁ, J., UHLÍŘOVÁ M. Pojmová mapa jako most k porozumění matematice. *Matematika 5: Specifika matematické edukace v prostředí primární školy*. 1. vyd. Olomouc: UPOL, 2012, s. 302-307. ISBN 978-80-244-3048-5.

MAŇÁK, J., ŠVEC, V. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003, 219 s. ISBN 80-731-5039-5.

PASCH, M. *Od vzdělávacího programu k vyučovací hodině: jak pracovat s kurikulem*. Vyd. 1. Praha: Portál, 1998, 416 s. ISBN 80-717-8127-4.

POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 3. vyd. Praha: SPN, 1972, 627 s. Kostka.

POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia – stereometrie*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009, 223 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80.7196-389-9.

PROKŠA, M., et al. *Metodológia pedagogického výskumu a jeho aplikácia v didaktikách prírodných vied*. 1. vyd. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 2008, 229 s. ISBN 978-80-223-2562-2.

PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. 4., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2003, 322 s. ISBN 80-717-8772-8.

REKTORYS, K. *Přehled užití matematiky*. 4., nezm. vyd. Praha: SNTL, 1981, 1139 s.

RULAND, J., FERENZ G. *Posvátná geometrie platonských těles: kosmické útvary pěti elementů a jejich praktické použití v životě*. Olomouc: ANAG, 2013, 247 s. ISBN 978-80-7263-776-8.

SUTTON, D., NYKLOVÁ H. *Platónská a Archimedovská tělesa: Geometrie prostoru*. 1. vyd. Praha: Dokořán, 2011, 66 s. ISBN 978-807-3633-493.

TOLLINGEROVÁ, D., KNĚZŮ, V., KULIČ, V. *Programované učení*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966, 189 s

VOŠICKÝ, Z., LANK, V., VONDRA, M. *Matematika a fyzika: matematika, cvičení z matematiky, fyzika*. 1. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2007, s. 5-208. ISBN 978-80-253-0523-2.

## Elektronické zdroje

Archimédes. In: *Wikipedia: otevřená encyklopedie* [online]. St. Petersburg (Florida): Wikimedia Foundation, 2001, 19. 2. 2014 [cit. 2014-03-05]. Česká verze. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Archim%C3%A9des>

BENDL, S., VOŇKOVÁ, H. Využití pojmových map ve výuce pedagogiky. In: *Pedagogická orientace*. Praha: Česká pedagogická společnost, 2010, s. 16-38. 20, 1. ISSN 1211-4669. Dostupné z: [http://www.ped.muni.cz/pedor/archiv/2010/PedOr\\_10\\_1\\_VyuzitiPojmovychMap\\_BendlVonkova.pdf](http://www.ped.muni.cz/pedor/archiv/2010/PedOr_10_1_VyuzitiPojmovychMap_BendlVonkova.pdf)

CIBÁKOVÁ, D. *Jazyk a kognícia v rozvíjaní porozumenia textu u žiaka primárnej školy* [online]. 1. vyd. Prešov: Prešovská univerzita v Prešove, 2012 [cit. 2013-12-13]. ISBN 978-80-555-0605-0. Dostupné z: <http://www.pulib.sk/web/kniznica/elpub/dokument/Cibakova1>

CHALUPOVÁ, M. *Pojmové mapy jako nástroj aktivního učení v matematice* [online]. Olomouc, 2006 [cit. 2014-03-05]. Dostupné z: [http://www.upol.cz/fileadmin/user\\_upload/PdF-katedry/KMT/Chalupova.pps](http://www.upol.cz/fileadmin/user_upload/PdF-katedry/KMT/Chalupova.pps)

CHMELÍKOVÁ, V., MORAVEC, L.: *Pravidelné mnohostěny*. MFF UK Praha, 2007. Dostupné z: [www.sgo.cz/show-file/466/](http://www.sgo.cz/show-file/466/)

IHMC story. *IHMC: Florida Institute For Humans & Machine Cognition* [online]. [cit. 2013-12-15]. Dostupné z: <http://www.ihmc.us/aboutIHMC.php>

JIRÍČKOVÁ, J. *Mnohostěny*. Olomouc, 2013. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Přírodovědecká fakulta. Katedra algebry a geometrie. Dostupné z: <https://library.upol.cz/aRLreports/kp/00171803-373068995.docx>.

Joseph D. Novak: Senior Research Scientist. *IHMC: Florida Institute For Humans & Machine Cognition* [online]. [cit. 2013-12-13]. Dostupné z: <http://www.ihmc.us/groups/jnovak/>

KEPRTOVÁ, P. *Pojmové mapy*. Olomouc, 2009. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Přírodovědecká fakulta. Katedra experimentální fyziky. Dostupné z: <http://theses.cz/id/nb733b/72543-417574265.pdf>

Krychle. In: *Wikipedia: otevřená encyklopedie* [online]. St. Petersburg (Florida): Wikimedia Foundation, 2001, 17. 2. 2014 [cit. 2014-03-05]. Česká verze. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Krychle>

MAREŠ, Jiří. Učení a subjektivní mapy pojmů. In: *Pedagogika*. Praha: Pedagogická fakulta UK, 2011, s. 215-247, 61, 3. ISSN 2336-2189. Dostupné z: <http://userweb.pedf.cuni.cz/wp/pedagogika/?p=805>

NOVAK, J. D, CAÑAS A. J. The Theory Underlying Concept Maps and How to Construct Them. In: *Technical Report IHMC CmapTools* [online]. Florida Institute for Human and Machine Cognition, 2008, [cit. 2013-12-15]. Dostupné z: <http://cmap.ihmc.us/Publications/ResearchPapers/TheoryUnderlyingConceptMaps.pdf>

NOVÁK, M.. Azelujos didácticos - malé ohlédnutí za zapomenutou kapitolou: Historie matematického vyučování. In: *E-Pedagogium: nezávislý odborný časopis určený pedagogickým pracovníkům všech typů škol* [online]. Olomouc: UPOL, 2005 [cit. 2014-04-04]. 1. ISSN 1213-7758. Dostupné z: [http://www.pdf.upol.cz/fileadmin/user\\_upload/PdF/e-pedagogium/e-ped\\_1-2005.pdf](http://www.pdf.upol.cz/fileadmin/user_upload/PdF/e-pedagogium/e-ped_1-2005.pdf)

*Pojmové mapy a jejich uplatnění v projektové výuce*. Katedra chemie Univerzita J. E. Purkyně [online]. Ústí nad Labem [cit. 2014-03-02]. Dostupné z: [chemistry.ujep.cz/download.php?soubor=pojmove-mapy-projekt-.ppt](http://chemistry.ujep.cz/download.php?soubor=pojmove-mapy-projekt-.ppt)

*Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. 126 s. [cit. 2014-02-07]. Dostupné z:  
[http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV\\_2007-07.pdf](http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf).

Root Cmap: General Description of Software. In: *IHMC: CmapTool Documentation* [online]. [cit. 2014-03-09]. Dostupné z:  
[http://cmapskm.ihmc.us/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1064009710027\\_1637638703\\_27098&partName=htmltext](http://cmapskm.ihmc.us/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1064009710027_1637638703_27098&partName=htmltext)

## **Seznam příloh**

Příloha č. 1 - Pojmová mapa tělesa

Příloha č. 2 - Pojmová mapa krychle

Příloha č. 3 - Pojmová mapa Archimédovská tělesa

Příloha č. 4 - Přehled Archimédovských těles

**Příloha č. 4 - Přehled Archimédovských těles (Chmelíková, Moravec, 2007, s. 17)**

<b>Název</b>	<b>Počet vrcholů</b>	<b>Počet hran</b>	<b>Počet a typy stěn</b>	<b>Platónské těleso</b>
<b>Ořezaný tetraedr</b>	12	18	4 šestiúhelníků 5 trojúhelníků	Čtyřstěn
<b>Kuboaktedr</b>	12	24	8 trojúhelníků 6 čtverců	Krychle, Osmistěn
<b>Ořezaný oktaedr</b>	24	36	6 čtverců 8 šestiúhelníků	Osmistěn
<b>Ořezaná krychle</b>	24	36	8 trojúhelníků 6 osmiúhelníků	Krychle
<b>Rombokuboktaedr</b>	24	48	8 trojúhelníků 18 čtverců	Krychle, Osmistěn
<b>Ořezaný Kuboktaedr</b>	48	72	12 čtverců 8 šestiúhelníků 6 osmiúhelníků	Krychle, Osmistěn
<b>Ikosadodekaedr</b>	30	60	20 trojúhelníků 12 pětiúhelníků	Dvanáctistěn, Dvacetistěn
<b>Ořezaný ikosaedr</b>	60	90	12 pětiúhelníků 20 šestiúhelníků	Dvacetistěn
<b>Ořezaný dodekaedr</b>	60	90	20 trojúhelníků 12 desetiúhelníků	Dvanáctistěn
<b>Otupená krychle</b>	24	60	32 trojúhelníků 6 čtverců	Krychle
<b>Romboikosadodaktaedr</b>	60	120	20 trojúhelníků 30 čtverců 12 pětiúhelníků	Dvanáctistěn, Dvacetistěn
<b>Ořezaný ikosadodekaedr</b>	120	180	30 čtverců 20 šestiúhelníků 12 desetiúhelníků	Dvanáctistěn, Dvacetistěn
<b>Otupený dodekaedr</b>	60	150	80 trojúhelníků 12 pětiúhelníků	Dvanáctistěn

## ANOTACE

<b>Jméno a příjmení:</b>	Petra Machýčková
<b>Katedra:</b>	Katedra matematiky
<b>Vedoucí práce:</b>	doc. PhDr. Bohumil Novák, CSc.
<b>Rok obhajoby:</b>	2014

<b>Název práce:</b>	Pojmové mapování
<b>Název v angličtině:</b>	Conceptual Mapping in Mathematics
<b>Anotace práce:</b>	<p>Pojmové mapování je výuková metoda založená na systematickém propojování pojmů a nalezení jejich vzájemných vztahů. Výsledkem pojmového mapování jsou pojmové mapy. Uvedená bakalářská práce uvádí základní charakteristiky map a jejich konstrukce. Zároveň naznačuje možné využití pojmových map ve výuce matematiky. Na konci práce se nacházejí ukázky tvorby map v počítačovém programu CmapTool na třech příkladech geometrického učiva, které mohou být využity jako metodický návod pro učitele základních i středních škol. Návod by měl učitelům pomoci se začleňováním pojmového mapování jako výukové metody do předmětu matematiky.</p>
<b>Klíčová slova:</b>	Pojem, pojmové mapování, pojmové mapy, výuková metoda, CmapTool, IHMC, geometrická tělesa, krychle, Archimédovská tělesa

<b>Anotace v angličtině:</b>	Conceptual mapping is a teaching method that is based on a systematic compilation of concepts and finding their mutual relations. The result of conceptual mappings are conceptual maps. The bachelor thesis presents the basic characteristics of maps and their construction. At the same time suggesting the possible use of conceptual maps in teaching mathematics. At the end of the work are examples of map making in a computer program CmapTool on three examples of geometric curriculum that can be used as a methodological guide for teachers of primary and secondary schools. The instructions should help teachers with integrating conceptual mapping as a teaching method in the subject of mathematics.
<b>Klíčová slova v angličtině:</b>	Concept, mapping conceptual, conceptual teaching method, CmapTool, IHMC, geometric solids, cube, Archimedean solids
<b>Přílohy vázané v práci:</b>	Příloha č. 1 - Pojmová mapa tělesa Příloha č. 2 - Pojmová mapa krychle Příloha č. 3 - Pojmová mapa Archimédovská tělesa Příloha č. 4 - Přehled Archimédovských těles
<b>Rozsah práce:</b>	43 stran
<b>Jazyk práce:</b>	Český